超大统一场流形理论

Chaoda Tongyichang Liuxing Lilun

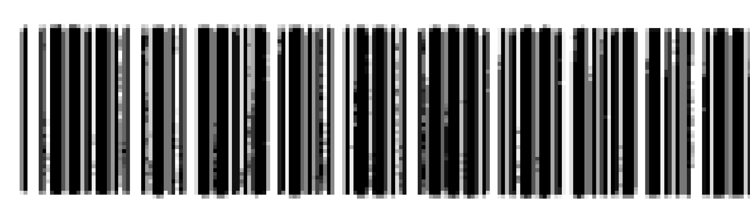
云南科技出版社

超大统一场流形理论

云南科技出版社

超大统一场流形理论

陈蜀乔 著





云南科技出版社

图书在版编目(CIP)数据

超大统一场流形理论/陈蜀乔著.—昆明:云南科技出版社,2002.3
ISBN 7-5416-1615-X

Ⅰ.超... Ⅱ.陈... Ⅲ.统一场论—流形—理论—研究 Ⅳ.0412.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第009873号

云南科技出版社出版发行
(昆明市环城西路609号云南新闻出版大楼 邮政编码:650034)
出版人:杨新书
昆明市五华区教委印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787mm×1 092mm 1/16 印张:9.5 字数:220千字
2002年3月第1版 2002年3月第1次印刷
印数:1~1000册 定价:22.00元



前　言

《超大统一场流形理论》是一个全新的理论，与现今的基础物理学理论存在着某些不同的看法。作者把这种不懈的、深入的、长期的、独立的思考写在了这本书中，以供读者参考。

本书不可避免地有很多不完善之处，在理论表达上以及数学语言的表述上也不够精确和完善。但作为一个全新的理论体系，在刚开始产生时往往是简陋的、不完善的，要形成真正严谨而完善的理论需要全球相关的物理学家共同而长期的努力。

爱因斯坦曾说关于宇宙的最不可理解的事是它是可以理解的。量子场论和广义相对论这两种最精确、最成功的理论能被统一在同一种理论中吗？对引力场、电磁场、强场和弱作用场四种力场是否存在共同的物理本质？是否存在一种理论能完全解决上述这些问题？这一直是物理学的热点问题。目前把量子场论和广义相对论进行统一，寄希望于能统一在量子引力理论中，把引力场、电磁场、强场和弱作用场四种力场进行统一的还有超弦理论。但这些理论都存在重重困难。现在的量子场论首先从实验出发来研究粒子的性质，由粒子外部特性的表现来推断粒子的内禀结构和内禀特性。而实验的手段是很单一的，即总是采用粒子相互碰撞的形式来进行实验研究的，除此之外我们很难找到其他研究手段。由于我们无法找到比基本粒子本身更小的探针，于是只有通过粒子相互作用，并分析实验结果，才有可能认识和了解粒子的性质。对于基本粒子来说，无论相互作用的能量有多高，对于实验观测来说，基本粒子都无法击碎，而是产生更多的其他粒子，这种性质阻止了我们对粒子内禀空间的认识，所了解的只是基本粒子的整体性质，很难由粒子外部特性的表现来推断粒子的内禀结构和内禀特性。因而我们的现在的量子场论从未涉及到基本粒子的内禀空间。

本书所建立的统一场流形理论数学形式上大部分采用黎曼几何和应变理论来表述，从物理表述空间来看，场流形理论是直接从粒子的内禀流形入手来研究粒子的性质，由内至外来进行研究的，场流形理论成功地把引力理论和量子理论两种理论完美地统一在一种理论中。本书所建立的整个超大统一场流形理论是建立在四条基本假设之上，即认为真空存在一种三维的有弹性场流形。由此出发，我们能构造出一个完善而简洁的统一场流形理论。因为一个正确的理论应该满足三点要求：尽可能少的假设，能解释现有的理论和实验，有预见性。而场流形理论在四条基本假设之上，对引力场、电磁场、弱作用场、强场四种力场作出了统一的表述。面对几乎所有的现代物理学中的难解之谜总能迎刃而解，对许多重大的基本问题如：时间、质量、自旋、粒子的全同性、宇称不守恒、光子结构、精细结构常数、量子场本质、引力波不可测性、夸克禁闭、弱作用本质等等作出了简洁明晰的表述。关于这一点读完本书以后您就能感受到。

把电引力、磁场、强场和弱力场四种力场进行统一的理论为超大统一理论，对四种力场进行统一表述一直是物理学努力的方向。本书所建立的超大统一场流形理论提出了全新的想法，达到了四种力场统一的目的，并为超大统一理论的发展提供了全新的思路。

作者任教于昆明理工大学交通学院，真诚地感谢两位恩师云南大学物理系赵树松教授和云南师范大学物理系李淮江教授、以及云南大学物理系的[illegible]同学赵喜。他们教授了我大量的物理学知识并启迪了我良好的思维方式。作者还感谢好友汪泽宇给予我很多精神上的鼓励和哲学方面的探讨。

2002年 1月 8日

目　录

第一章　时空流形

在相对论中，时空不再是牛顿的绝对时空，时空是紧密相联的。时空可以被黎曼几何完美地表述，时空和弯曲流形所对应，这表明时空应具有物质基础。大量的高能物理实验证实真空不空。在量子场论中，真空不是空无一物，而是量子场的基态。

越来越多的高能物理实验表明真空这种物质具有复杂的内在结构。人类对于真空的无知已经严重地阻碍了人们对物质世界的进一步认识，阻碍了理论物理学的发展，因此只有对真空有了进一步的认识，才能有可能走出现代量子场论的困境，人类对物质世界的认识才能产生新的飞跃。

这里，我们将要建立的统一场理论正是基于真空有物质结构这一基本思想的基础上，对引力场、电磁场、弱作用场、强场四种力场作出了统一的表述。并对许多重大的基本问题如：时间、质量、自旋、粒子的全同性、宇称不守恒、光子结构、精细结构常数、量子场本质、引力波不可测性、夸克禁闭、弱作用本质等等作出了简洁明晰的表述。

第一节　场流形

众所周知，我们生活的世界是三维世界，再把真空不空这一基本事实结合起来，我们做出了如下几点假设：

一、场流形理论的基本假设

假设 I

假设真空由均匀的物质构成，这种物质具有三维特性，这种物质形态我们称为真空三维场流形，或者称为三维基态场流形。

假设 II

假设这样的三维流形可以发生形变，并存在着拉伸极限和压缩极限，在拉伸和压缩极限内为弹形变。

假设III

场流形基本单元的场流具有维度独立性。

假设IV

场流形的弹性形变会降低其传播能力。

二、场流形的维度性质

由前面的假设，我们知道了场流形的构成，下面我们将更严格地从数学的角度看一下场流形。

传统的流形概念来源于欧氏空间。n 维实流形就可以看作是由一块块 R^n（实 n 维欧氏空间）粘起来的结果。因此，n 维实流形的最重要的特性就是在它的每一点的邻近，都有 n 维的局部坐标系。

定义 1　实 n 维流形 M 是一个毫斯道夫(Hausdorff)空间，它的每一个点有一个含有该点的开集与 R^n 的开集同胚。

定义 2　毫斯道夫空间是一个可分空间，其中的任意两个分开的点各自具有互不相交的开邻域。

现在我们来具体考虑一下场流形的特性，由前面的假设可以知道场流形是物质的，于是我们具体地分析一下场流形的三维特性。

图 1-1 是一场流形，是平直平的场流形，这一场流形为三维线度为 h 的立方体它可以分成 $2^3=8$ 块线度为 h/2 的小立方体流形。假设一个小立方体分裂成 8 个小立方体的概率均为 p，这种过程不断重复下去，就形成了大大小小立方块的分形结构，设 N_m 是经过 m 次分裂后碎块的总数就为

$$N_{m+1}=[8P+(1-P)]N_m \qquad (1\text{-}1)$$

上式右端第一项表示破裂成的小块数，右端第二项是还未分裂的小块数目。

根据分数维的定义式

$$N(r)=r^{-D} \qquad (1\text{-}2a)$$

或 $$D=\frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \qquad (1\text{-}2b)$$

形成碎块的分布的分形维数就是

$$D=\frac{\log(\dfrac{N_{m+1}}{N_m})}{\log(\dfrac{N_m}{N_{m+1}})}=\frac{\log(7P+1)}{\log 2} \qquad (1\text{-}3)$$

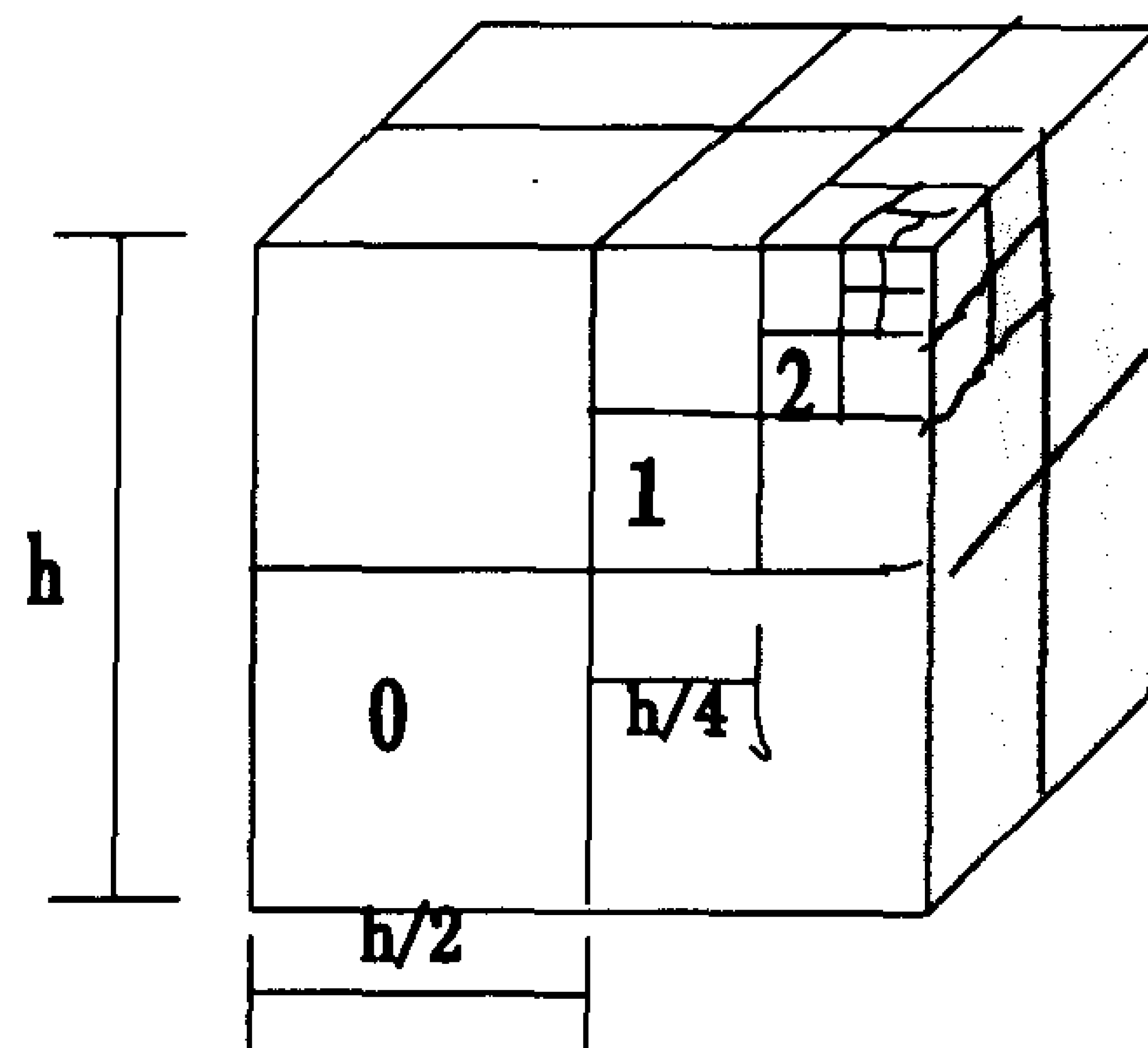


图 1-1 三维真空场流形

当这一块场流形存在一种严格的分形结构，即总是无限可分，那么可分的概率为 1，即 P=1，则

$$D=\frac{\log 8}{\log 2}=3$$

流形的维度等于三维。

而当场流形的结构出现问题，如场质缺损(局域)未局域场质增多，则 $P\neq 0$，则 $D\neq 3$。

对于实际的物理学来说，当场质经过无限次分裂后，总存在一种最最基本的基元。这就是能保持三维特性的最小单元，称为基本单元场流形。

第二节　基本单元场流形的静态分析

由前面我们知道，基本单元场流形具有三维特性。因此，对基本单元场流形最简单的静态描述我们可以借用弹性理论中应变理论部分进行表述。

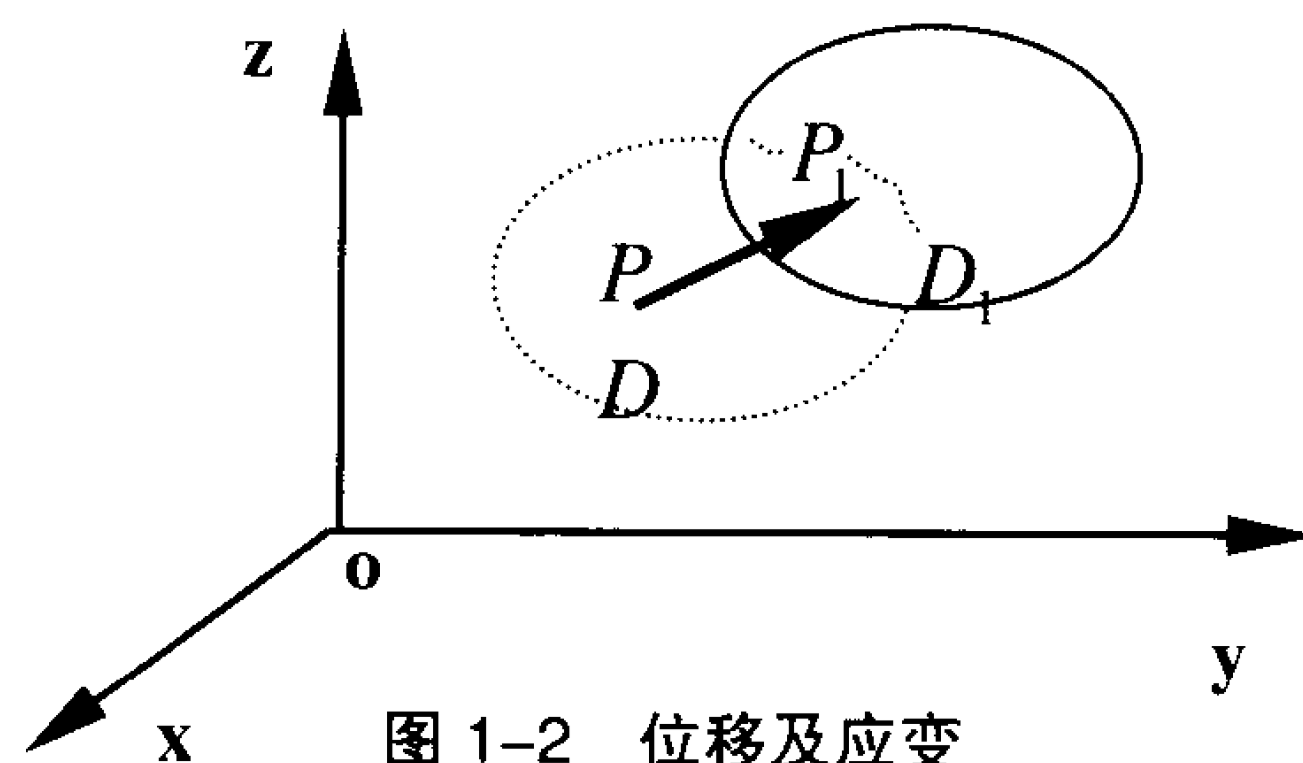


图 1-2　位移及应变

一、位移和应变

当场流形发生形变时，称为场流形的形变。这种形变包括体积改变和形状畸变。我们先不考虑场流形形变的原因。对于整体场流形没有发生缺损时，场流形应满足连续性假设。如图 1-2 要求区域 D 内的每一点，连续地变化到区域 D_1 的相应点，而且两者成一一对应的关系。具体地说，如果 P 点为 D_1 内的任意一点，在物体变形后，它经过一个位移而变到 D_1 中的一点 P_1；若分别用(x、y、z)和（z_1、y_1、z_1）表示 P 点和 P_1 点的坐标。这里 x_1，y_1，z_1 必需是 x、y、z 的单值连续函数。现在我们把 P_1 点和 P 点的三个点标对应地相减，可得 P 点的位移负量 $PP_1=U$ 在三个坐标轴上的分量，这三个分量简称为们移分量，如图 u、v、w 表示们位移分量，则有：

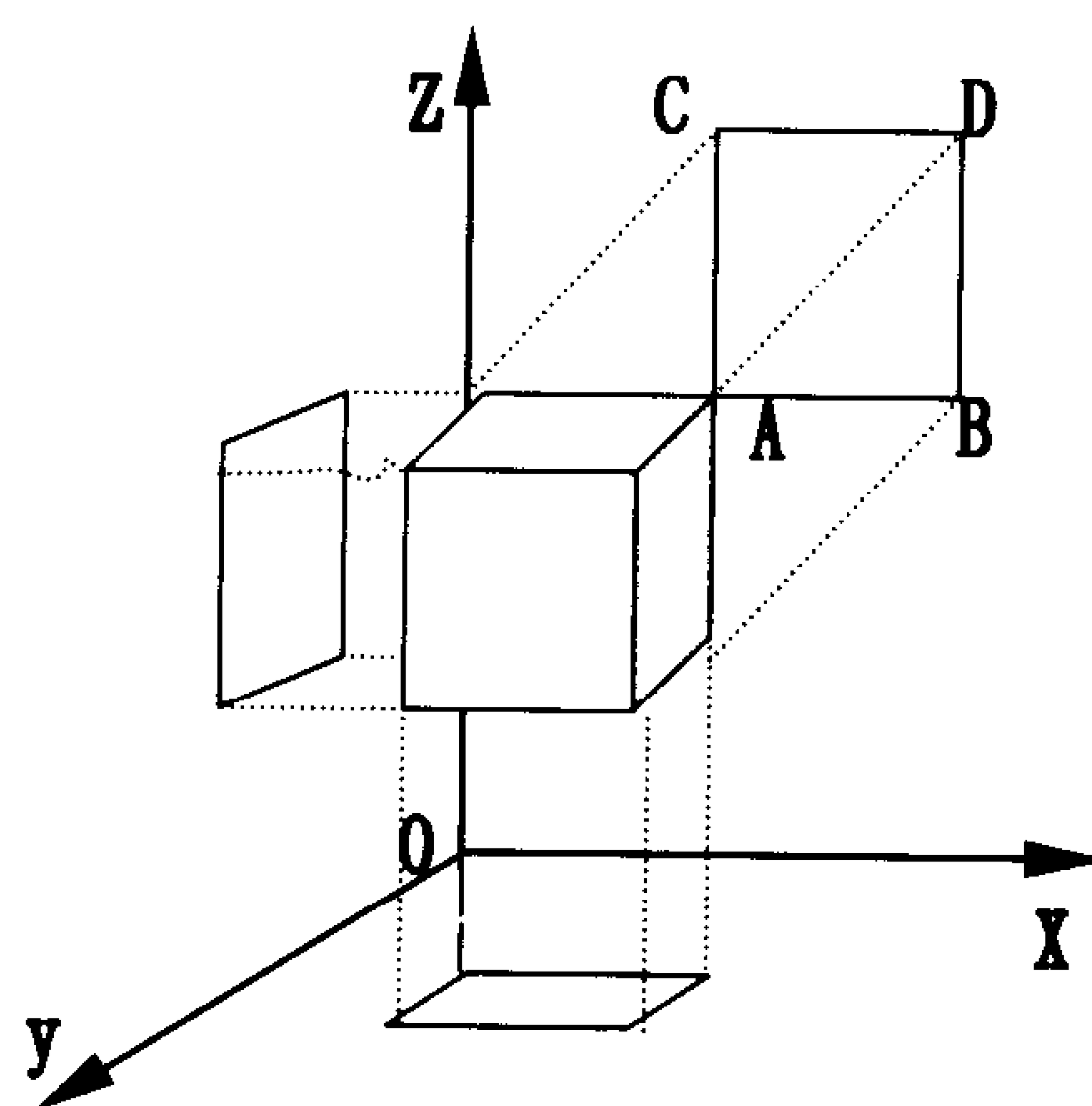
$$\left.\begin{aligned} u &= x_1(x,y,z)-x = f_1(x,y,z) \\ v &= y_1(x,y,z)-y = f_2(x,y,z) \\ w &= z_1(x,y,z)-z = f_3(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

基本单元场流形具有三维特性，于是我们可以想像成为一个微分平行六面体，使它们的六个面分别和三个坐标平面平行。显然，如果其中每个微分面到六面体的变形为已知，则整个流形的变形情况就知道了。以后我们分别用正应变（对称相对伸长度）与剪应变表示棱边的伸长与棱边夹角的变化。

首先来研究一下平行六面体在 xoz 面上的投影 $ABCD$（图 1-3a）。在变形前六面体 A 点的坐标为 x，y，z。在六面体变形时,投影上的 A 点移到 A' 点，B 点移到 B' 点，C 点移到 C' 点，D 点移到 D' 点，而整个矩形 $ABCD$ 移到 $A'\ B'\ C'\ D'$ 的位置，A 的位移是 u 和 w 它们是坐标的函数，因此有

$$u = f_1(x,y,z),$$
$$w = f_3(x,y,z)$$

B 点的 x 坐标和 A 点的 x 坐标是不同的，因此 B 点沿 x 轴的位移不同，根据泰勒级数展开，并略去高阶微量后，其表达式应为



$$u_1 = f_1(x+dx,y,z) = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx \tag{1-5}$$

图 1-3(a) 平行六面体投影

若边长 $AB = dx$，则在 x 轴上的投影的全伸长量为

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

如果用 ε_x 表示沿 x 轴的相对伸长，则有

$$\varepsilon_x = \frac{u_1 - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1-6}$$

用相同的方法可以得到平行于 y 轴和正轴的边长的相对伸长为

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \partial_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1-7}$$

下面再来研究一下六面体的各直角由于剪应变而发生的角形变。取变形剪的直角 BAC 或 $B''A'C''$，变形时，棱边 $A'B'$ 转动一个角度 α，棱边 $A'C''$ 转动一个角度 β（如图 1-3b），在 xoz 平面内，角应变用 γ_{zx} 表示，其值为角 α 和角 β 之和，即

$$\gamma_{zx} = \alpha + \beta \tag{1-9}$$

由于变形是微小的，所以这些解可以用正切之和表示，也可以用位移表示。

若 A 点在 z 轴方向的位移为

$$w = f_3(x, y, z)$$

B 点在 z 轴方向的位移为

$$w_1 = f_3(x + dx, y, z) = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

因为由 A 点过渡到 B 点时，坐标 x 发生变化，而位移也将由于 x 的变化而发生相应的变化。

B 点与 A 点沿 z 轴方向位移之差为 $B''B' = W_1' - W = \frac{\partial w}{\partial x} dx$。角三角形 $AB''B'$ 中，可得

$$\alpha \approx \text{tg}\alpha = \frac{B''B'}{A'B''} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

在分解中，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 1 相比是个微量，故略去，因而得

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$$

用相同的方法可得

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial z}$$

最后由式（1-8）可得在 xoz 平面内相对剪应变为

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

用同样的方法可以得到 xoy 和 yoz 平面内的剪应变为

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1-9}$$

由以上分析便可得到用位移表示应变的几何关系为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

上式称为柯西（Augustin-Louis Cauchy）几何关系。

对于正应变ε_x，如果 u 随 x 的增大而增大，则ε_x将为正值，这相当于场流形基本单元 dx 的拉伸，如果函数 u 随 x 的增大而减小，则ε_x将为负值，此时相当于基本单元场流形 dx 的压缩，这一规定和弹性理论应变的规定是相同的。

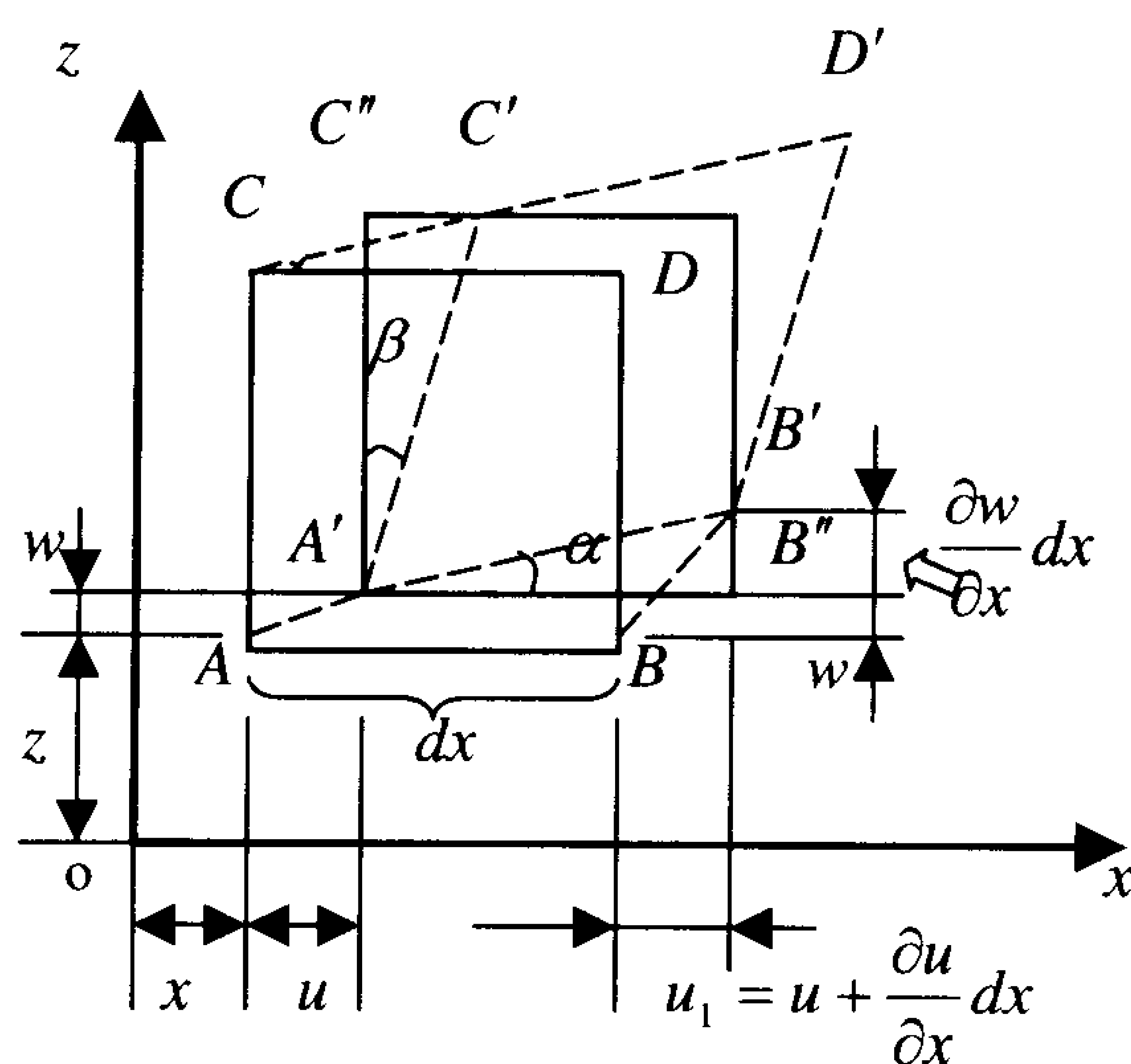


图 1-3（b） 剪应变

对于剪应变，直角 xoy 的减小相当于正的剪应变γ_{xy}，即六面体夹角的减小对应于正的剪应变，夹角的增大对应于负的剪应变。这一规定和弹性应变理论的规定是一致的。

利用类似的方法，可以导出（具体推导过程可参见《弹性理论基础》陆明万，罗学富著 P91 § 3-7 正交曲线坐标系中的几何方程）柱坐标应变的几何方程为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r} \\
\varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

球坐标系的几何方程

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{ctg\theta}{r}u_\theta \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\
\gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{ctg\theta}{r}u_\varphi \\
\gamma_{\varphi r} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}
\end{aligned}\right\} \tag{1-12}
$$

对于柱坐标系中的几何方程 $x_i = (r,\theta,z)$，和 $u_i = (u,v,w)$。u,v,w 分别表示一点位移在经向（n 方向）和环向（θ 方向）以及轴向（z 方向）的分量（即投影）。对于球坐标系 $x_i = (r,\vartheta,\phi)$，和 u_i=$(u_i, u_\theta, u_\varphi)$ 。

在（1-11）式中 ε_σ 和 $\gamma_{r\vartheta}$ 中各多出一项，下面将说明这两项的几何意义。

假定平面物体的半径为 r，圆周上的微圆段要发生了相同的位移 u（图 1-4)，则变形后该单元弧段的长度为 $(r+u)d\vartheta$，而原始长度为 $rd\theta$，所以相对伸长为

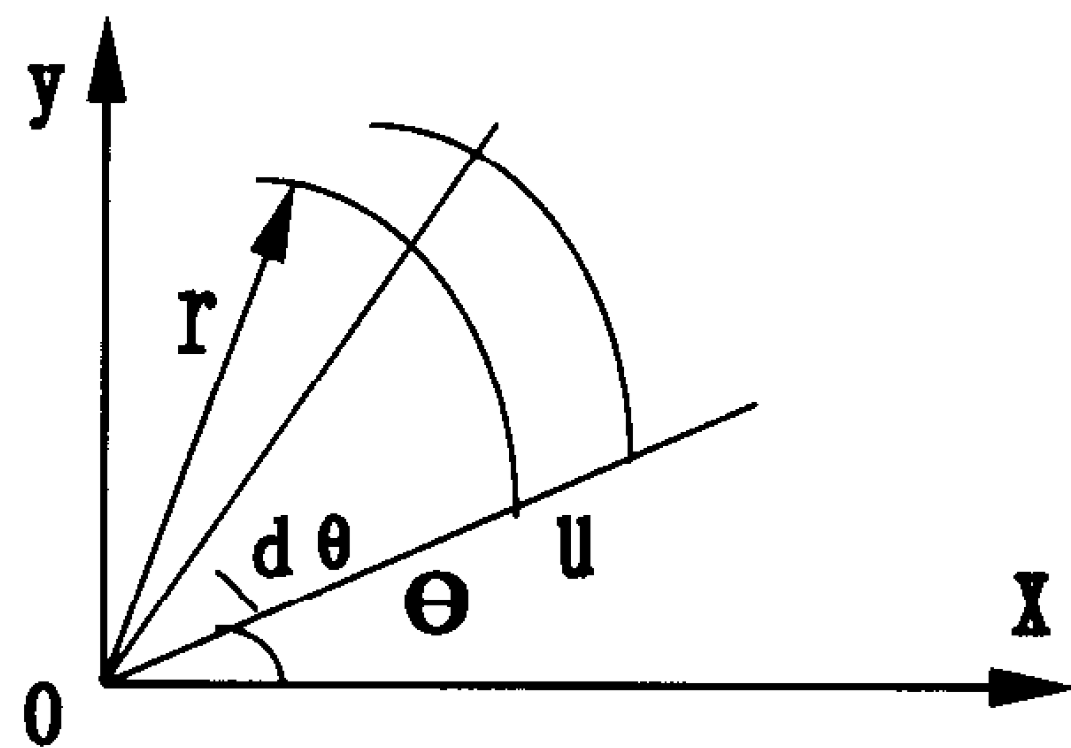


图 1–4　具有相同径向位移的圆弧

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}$$

由上式可知式（1-11）中 u/r 表示由于发生径向位移所引起的环向应变分量。

如果平面变形体某一元线段 AB 发生了下段形式的位移，即在变形后线段上各点沿其环向方向移动了相同的距离 v（图 1-5)，这样变形前由上与半径重合的直线段 AB，变形后移动到 CD 位置，不再与 C 点的半径重合，而彼此的夹角为 v/r，于是微元线段 AB 变形后的 CD 与 C 点圆周切线（ϑ 坐标线正方向）夹角为 $\pi/2+v/r$，夹角比 $\pi/2$ 增大了，根据剪应变的意义，即发生了剪应变 $\theta_{r\vartheta} = +\frac{v}{r}$，这就说明了所多出项的几何意义。

在研究轴对称问题时，由于 $v=0$，则式（1-11）可简化为

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad , \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} \tag{1-13}$$

在球对称问题中，变形的几何方程为

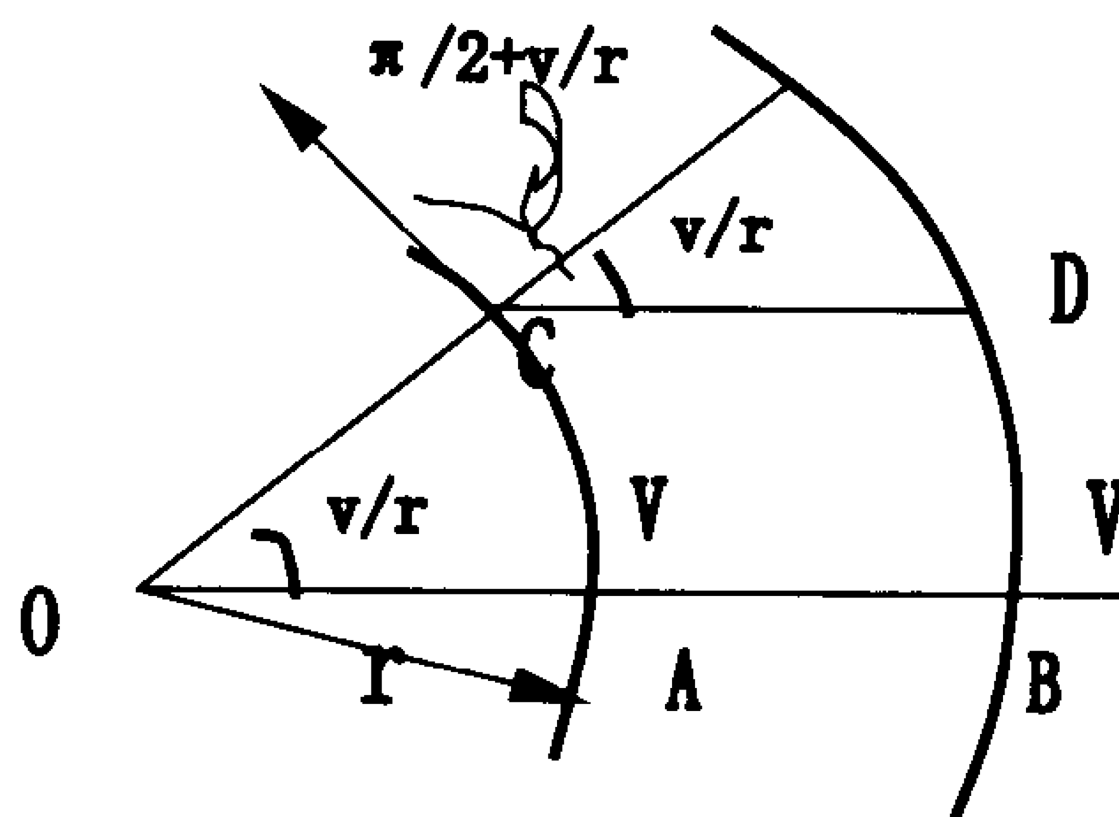


图 1–5 具有环向移动的圆弧

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \varepsilon_r = \tfrac{ur}{r} \tag{1-14}$$

二、主应变

在研究基本单元场流形应变问题时，可以找到三个互相重直的平面，在这些平面上没有剪应变，这样的平面为主平面，而这些平面的法线方向称为立方向。对应于主方向的正应变则称为主应变。

一点的应变状态可用张量表示，这时引进符号

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})\\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})\\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})\end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

应变张量为

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{1-16}$$

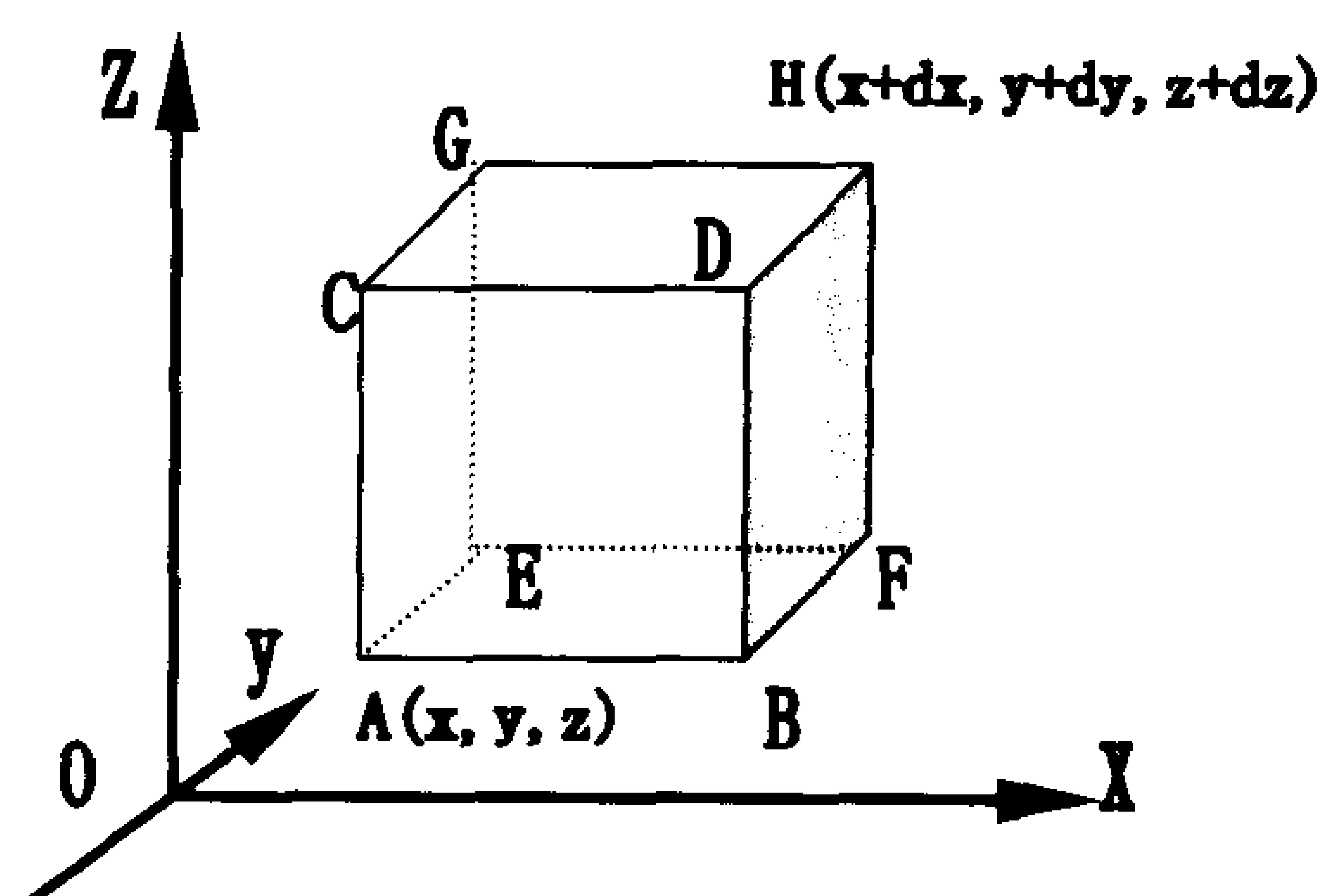


图 1-6 变形体的微元体

设有 ACDBEGHF 正六面体基本单元场流形（图 1-6），因为它是一个微元体，在研究物体的几何关系时，可以认为它的应变是均匀的。在变形前 A 点的坐标为(x, y, z)，变形后 A' 点的坐标为 $[(x+u),(y+v),(z+w)]$，u, v 和 w 为 A 点的位移，即 $A\ A'$ 在 ox，oy 和 oz 轴上的投影，而且假设这些都是很小的量，并且都是x, y, z的连续函数。H 点在变形前的坐标是$[(x+dx),(y+dy),(z+dz)]$变形后的坐标是 $[(x+dx)+(u+du)],[(y+dy)+(v+dv)],[(z+dz)+(w+dw)]$，其中 du, dv 和 dw 为 H 点，相对于 A 点的位移在ox, oy和oz轴上的投影。

由于u是x, y, z的连续函数。因此$(u+du)$也将是$(x+dx),(y+dy),(z+dz)$的连续函数。即如果有$u = f(x, y, z)$，　$(u+du) = f[(x+dx),(y+dy),(z+dz)]$而后一式用泰勒级数展示后，将有

$$u + du = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + (dx, dy, dz \text{ 的高阶项})$$

由于$u = f(x, y, z)$是很小的量，它的增量也都是很小的量，因此dx, dy, dz的高阶项都可以忽略，这时有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})dy + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})dz$$

$$+ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})dy + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})dz \tag{1-17}$$

在上式中，若后两项表示刚体转动，并不引起应变如（图 1-7）所示，则在计算应变时，可以忽略不计，故按式（1-15）对 ε_{xy} 和 ε_{xz} 的定义式（1-17）可写为

$$du = \varepsilon_x dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz \tag{1-18}$$

用同样的方法可以推导出 dv 和 dw 的表达式为

$$\left.\begin{aligned} dv = \varepsilon_{yx} dx + \varepsilon_y dy + \varepsilon_{zx} dz \\ dw = \varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{zy} dy + \varepsilon_z dz \end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

如用张量表示，式（1-18）可写为

$$du_i = \varepsilon_{ij} dx_j \quad (i, j = x, y, z).$$

在主应变空间中（$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$）表示一个应变状态（如图 1-8）。若 r 增加了一个量 dr，且其方向保持不变，这时 r 和 dr 在 ox, oy 和 oz 方向的投影是成比例的，应变表达式应满足如下关系

$$\varepsilon = \frac{dr}{r} = \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz}$$

因此可得

$$du = \varepsilon dx, dv = \varepsilon dy, dw = \varepsilon dz \tag{1-19}$$

将式（1-19）代入式（1-18）后，可得

$$du = \varepsilon dx = \varepsilon_x dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz$$

$$dv = \varepsilon dy = \varepsilon_{yx} dx + \varepsilon_y dy + \varepsilon_{yz} dz$$

$$dw = \varepsilon dz = \varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{yx} dy + \varepsilon_z dz$$

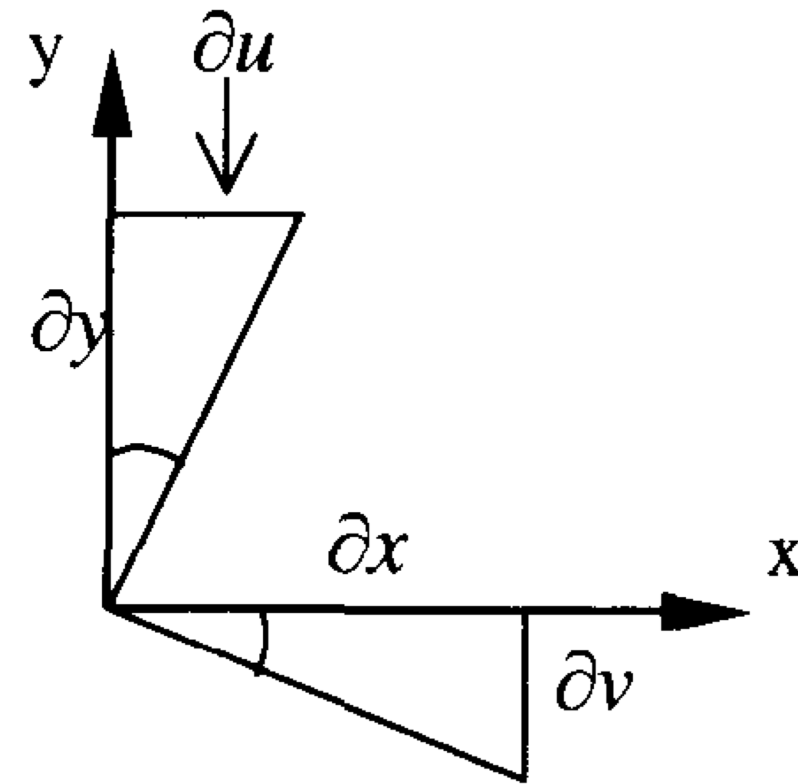


图 1-7 刚体转动示意图

由上式得

$$(\varepsilon_x - \varepsilon)dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz = 0$$

$$\varepsilon_{yx} dx + (\varepsilon_y - \varepsilon)dy + \varepsilon_{yz} dz = 0 \tag{1-20}$$

$$\varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{zy} dy + (\varepsilon_z - \varepsilon)dz = 0$$

如果式（1-20）的系数行列式为零，则此式将具有非零解，此时

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

将此行列式展开后，则可得

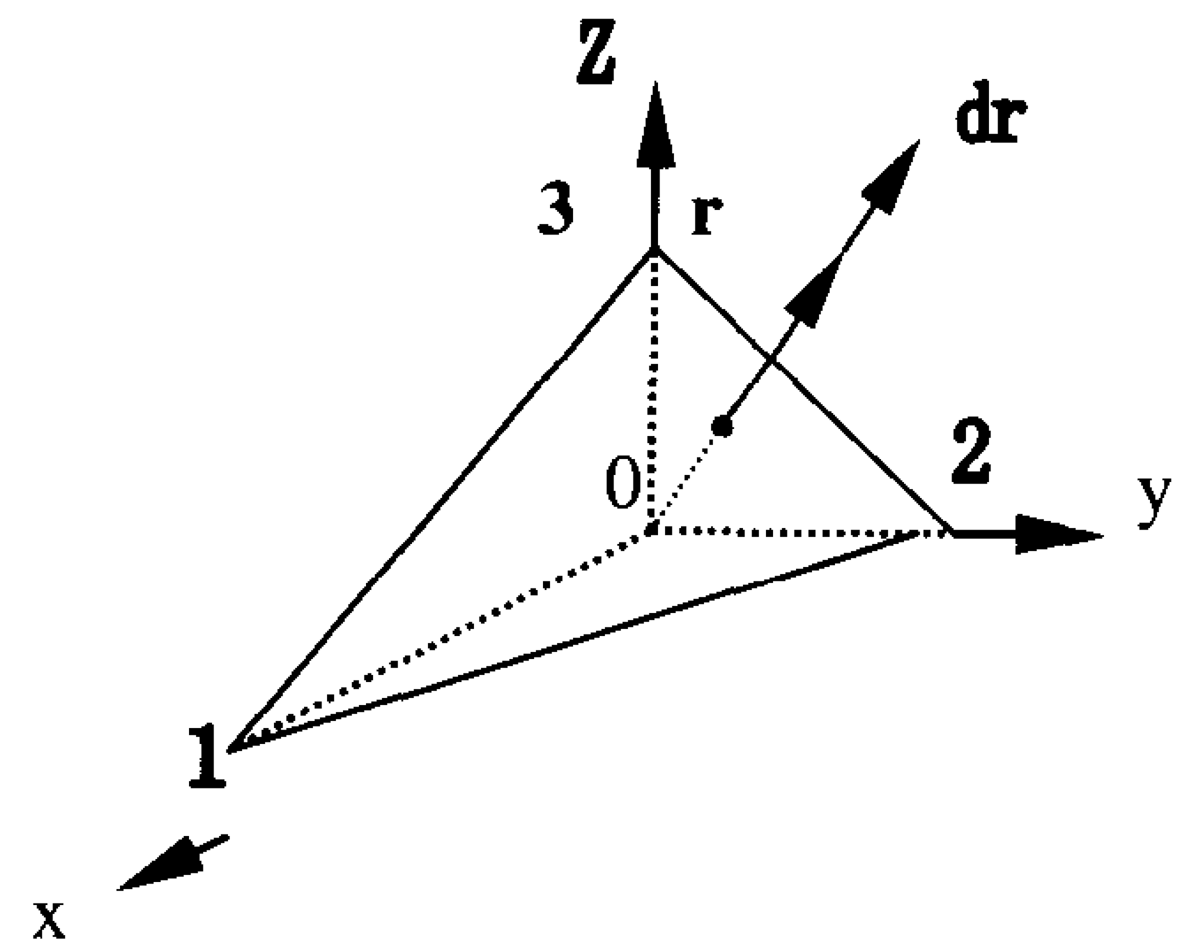


图 1-8 在主应变空间中应变和应变增量

$$\varepsilon^3-(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\varepsilon^2+[\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x-(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_{zx}^2)]\varepsilon$$
$$-\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z-2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}+(\varepsilon_x\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_y\varepsilon_{zx}^2+\varepsilon_z\varepsilon_{xy}^2)=0$$

式写成

$$\varepsilon^3-I_1'\varepsilon^2+I_2'\varepsilon-I_3'=0 \quad (1\text{-}21)$$

式中I_1', I_2'和I_3'为应变第一、第二和第三不变量，相应可写为

$$\left.\begin{aligned}I_1'&=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\\ I_2'&=\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x-\varepsilon_{xy}^2-\varepsilon_{yz}^2-\varepsilon_{zx}^2\\ I_3'&=\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z+2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}-(\varepsilon_x\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_y\varepsilon_{zx}^2+\varepsilon_z\varepsilon_{xy}^2)\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}22)$$

如果方程式（1-21）可以因式分解，则应有

$$(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon-\varepsilon_2)(\varepsilon-\varepsilon_3)=0$$

式中$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$为主应变，以主应变表示的应变不变量将为

$$\left.\begin{aligned}I_1'&=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\\ I_2'&=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1\\ I_3'&=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}23)$$

沿主方向取出边长为dx_1, dx_2, dx_3的正六面体，变形后其相对体积变化为（略去高阶小量）：

$$\theta=\frac{dv'-dv}{dv}$$
$$=\frac{(1+\varepsilon_1)dx_1(1+\varepsilon_2)dx_2(1+\varepsilon_3)dx_3-dx_1dx_2dx_3}{dx_1dx_2dx_3}$$
$$\approx\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\theta_1$$

因此第一应变不变量θ_1表示每单位体积变形后的体积变化，又称体积应变。

三、应变张量和应变偏量

应变可用张量表示，也可以分解为与体积变化有关的球形应变张量和与物体形状变化有关的应变偏量。球形应变张量由下式给出

$$\varepsilon_0\delta_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_0&0&0\\0&\varepsilon_0&0\\0&0&\varepsilon_0\end{bmatrix} \quad (1\text{-}24)$$

式中$\varepsilon_0=\frac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$为平均应变。应变偏量则可写为

$$e_{ij}=\begin{vmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon_0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_y-\varepsilon_0 & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon_0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{2\varepsilon_x-\varepsilon_y-\varepsilon_z}{3} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz} & \dfrac{2\varepsilon_y-\varepsilon_x-\varepsilon_z}{3} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \dfrac{2\varepsilon_z-\varepsilon_x-\varepsilon_y}{3}\end{vmatrix} \tag{1-25}$$

如用主应变表示应变偏量时，则有

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}{3} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{3}\end{vmatrix} \tag{1-26}$$

对于主剪应变

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=\pm(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\\ \gamma_2&=\pm(\varepsilon_3-\varepsilon_1)\\ \gamma_3&=\pm(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

如果$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3$则最大剪应变为

$$\gamma_{\max}=\varepsilon_1-\varepsilon_3 \tag{1-28}$$

由上式可知最大剪应变等于最大主应变与最小主应变之差。

八面体剪应变是在与三个应变主轴方向具有相同倾角平面上的剪应变，用γ_0表示，此时有

$$\begin{aligned}\gamma_0&=\frac{2}{3}\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2}\\ &=\frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}\end{aligned} \tag{1-29}$$

对于单向拉伸，可得

$$\varepsilon_1=\varepsilon\ ,\quad \varepsilon_2=-\mu\varepsilon\ ,\quad \varepsilon_3=-\mu\varepsilon \tag{1-30}$$

此时应变张量为

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & -\mu\varepsilon & 0\\ 0 & 0 & -\mu\varepsilon\end{bmatrix} \tag{1-31}$$

平均应变为

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{\varepsilon}{3}(1 - 2\mu) \tag{1-32}$$

应变偏量的分量为

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{2}{3}\varepsilon(1+\mu) \\ e_2 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_0 = -\frac{1}{3}\varepsilon(1+\mu) \\ e_3 &= \varepsilon_3 - \varepsilon_0 = -\frac{1}{3}\varepsilon(1+\mu) \end{aligned}\right\} \tag{1-33}$$

球形应变张量为

$$\delta_{ij}\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{3}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{3}(1-2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{3}(1-2\mu) \end{bmatrix} \tag{1-34}$$

应变偏量为

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\varepsilon}{3}(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{3}(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{3}(1+\mu) \end{bmatrix} \tag{1-35}$$

四、 应变协调方程

在研究场流形变形时，一般取一个平行六面体的基本单元场流形进行分析。场流形在变形时，各相邻小单元体不能是互相无关的，必然是相互有联系的，因此应该认为物体在变形场是连续的，变形后仍是连续的，例如在相邻的大面体 A 和 B 上（图 1-9a）其相邻的棱边是 ab 和 a_1b_1，变形后 ab 和 a_1b_1 都应当伸长和缩短同样的数值，因为它们是公共的棱边。如果六面体 ABCD 相交于 C 点（图 1-9b）在变形前 C 点角度总和是360°，变形后，这些角度都将改变，其中某些角度增大了，另一些角则减小了，但是它们的总和还应等于360°。由此可见，应变之间应该是以某种关系互相联系的。连续物体应变之间关系的数学表达式即为应变协调方程。

设物体中某一点的坐标是(x, y, z)，其位移是u, v和w,应变为$\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$和$\gamma_{yz}$，若已知$u, v$和$w$，则应变便可用位移表示，如果在表达式中消去位移$u, v$和$w$，则可得到应变之间的关系。

现将正应变ε_x对 y 取两次微分，而将ε_y对 x 取两次微分，则有

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

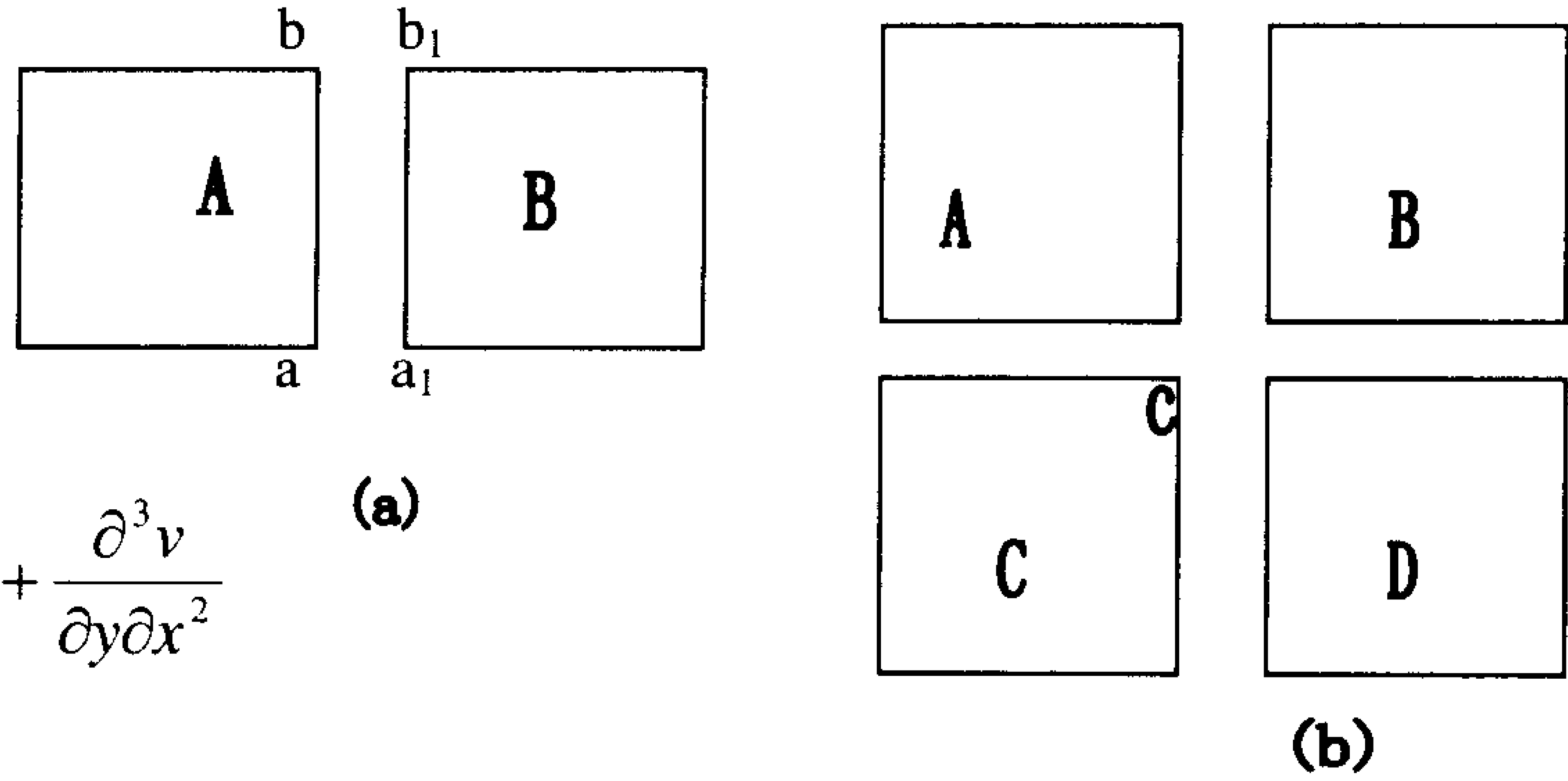


图 1-9 应变协调示意图

如将上式两边相加，可得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

上式右侧括弧中的表达式即为剪应变γ_{xy}，因此有

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{1-36}$$

用同样的方法可以得到另各两个类似的方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1-37}$$

如果取剪应变的表达式为

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

将上式的第一式对 z 取微分，第二式对 x 取微分，第三式对 y 取微分，则有

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

将上式中的第一式与第三式相加，然后减去第二式，则可得

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$

如将上式对 x 求导数，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} \tag{1-38}$$

用相同的方法，可得

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial x\partial z} \tag{1-38}$$

式（1-38）是由圣维南(Adhemar Jean Claude Barre de Saint-Venant)首次导出的，通常称为变形协调方程式或称为变形的协调方程。

变形协调方程保证了我们所研究的场流形不致发生断裂，仍然保持三维性质。应变协调方程给出了场应变的边界条件。

五、由应变求位移

考虑两个点 p^0 和 $\overline{p}$（图 1-10），它们的坐标分别为 x_k^0 和 $\overline{x}_k$。其中 p^0 是参考点，可选用已给定位移值的边界点，或已能判断具有单向位移的内点。设它的位移为 u_i^0。$\overline{p}$ 是任意内点，它的位移 $\overline{u}_i$ 可由沿连接 p^0、$\overline{p}$ 两点的任意曲线 C 积分而得

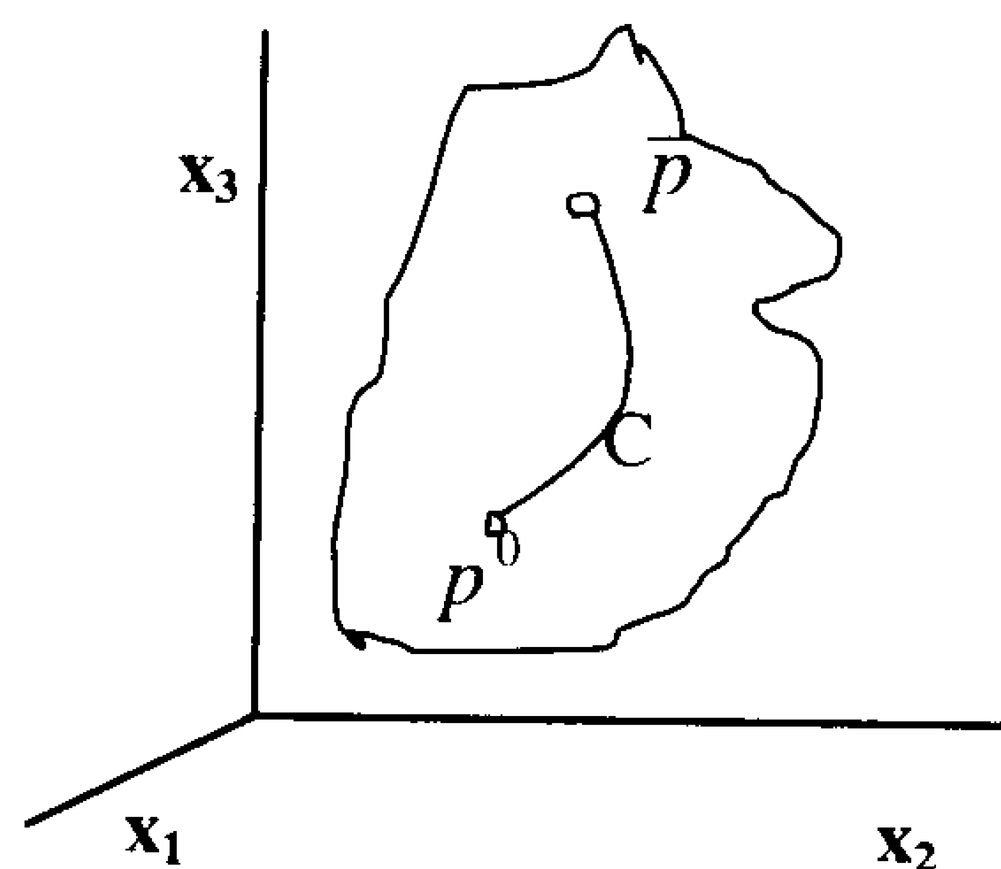


图 1-10　由应变求位移

$$\overline{u}_i=u_i^0+\int_{p^0}^{\overline{p}}du_i=u_i^0+\int_{p^0}^{\overline{p}}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}dx_l$$

$$=u_i^0+\int_{p^0}^{\overline{p}}\varepsilon_{il}dx_l-\int_{p^0}^{\overline{p}}\Omega_{ij}dx_l \tag{1-39}$$

第三节　协变流形

现在，我们已经建立起场流形的图像，这样的场流形和数学中的流形有很多不同的地方，首先场流形是以物质为基础的流形，而数学流形则是一种抽象的流形，因而场流形的测度是以物质为基础的，其次对三维数学流形 M 来说，M 是一个毫斯道夫空间，它的每

一个点有一个含有该点的开集与R^3的开集同胚，M 是无限可分的，存在点的概念，而三维场流形并不是无限可分的，是由无数基本单元场流形“粘接”起来所构成的流形。

一、绝对真空概念

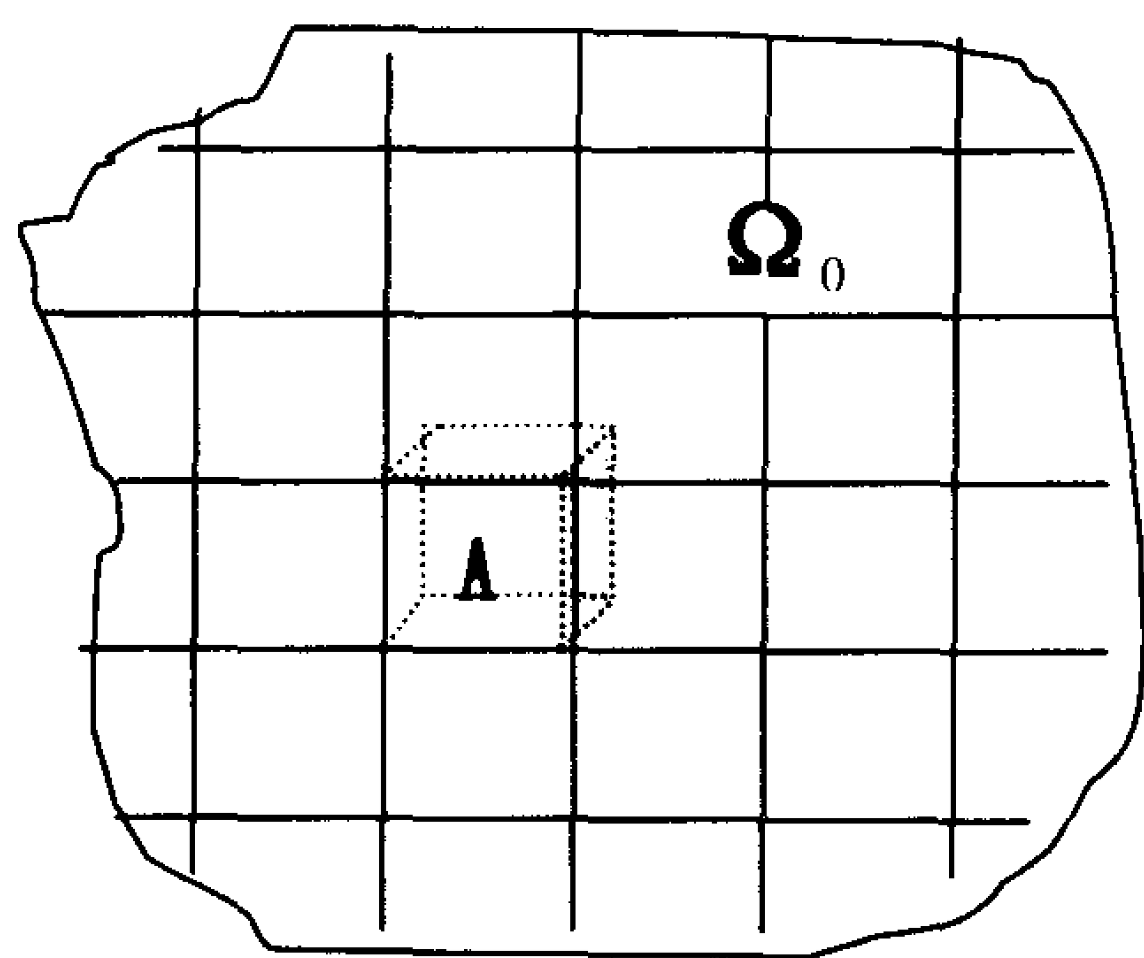


图 1-11(a) 真空流形Ω_0

如图 1-11a，当场流形没有任何形变，换而言之，基本单元场流形的应变

$$\varepsilon_{ij} \equiv 0 \quad (1\text{-}40)$$

由这种有限多基本单元场流形紧密地“粘合”起来，构成一个完整的三维平直流形Ω_0，这种流形称为真空流形。这种流形所表现出的特性是无任何可观测效应，由于无任何可观测效应的存在，使我们容易形成一种错误的概念，即认为真空是空无的，所以我们要特别注意无任何可观测效应并不意味着真空是空无的，真空充满了三维平直场流形，并称为平直协变流形,从时空的角度来看也可称平直时空流形Ω_0。

对于基本单元场流形处于平直状态时为图 1-11a 中的 A 所示，光线传播的路径为直线。而发生微小形变的基本单元场流形构成的流形为整体形变的场流形，如图 1-11b 的Ω，此时光线传播的路径为曲线。A'为发生微小形变基本单元场流形，其应变

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &\neq 0\\ \varepsilon_{ij,k} &\neq 0\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}41)$$

由这类场应变非零的基本单元场流形“粘合”起来便构成了整体形变场流形Ω，Ω场流形称为协变流形，于是我们作出如下定义：由基本单元场流形紧密地无间隙地构成的整体场流形称为协变流形。可分为平直协变流形（即绝对真空）Ω_0和弯曲协变流形Ω。

弯曲协变流形中的任一基本单元场流形的$\varepsilon_{ij} \neq 0$，且$\partial\varepsilon_{ij}/\partial x \neq 0$，也就是应变是非均匀的，那么在和场流形参照与相对处于非自由状态的参照与中存在可观效应，这种可观测效应表现为力场，在大范围流形中，最为熟知的是引力场。

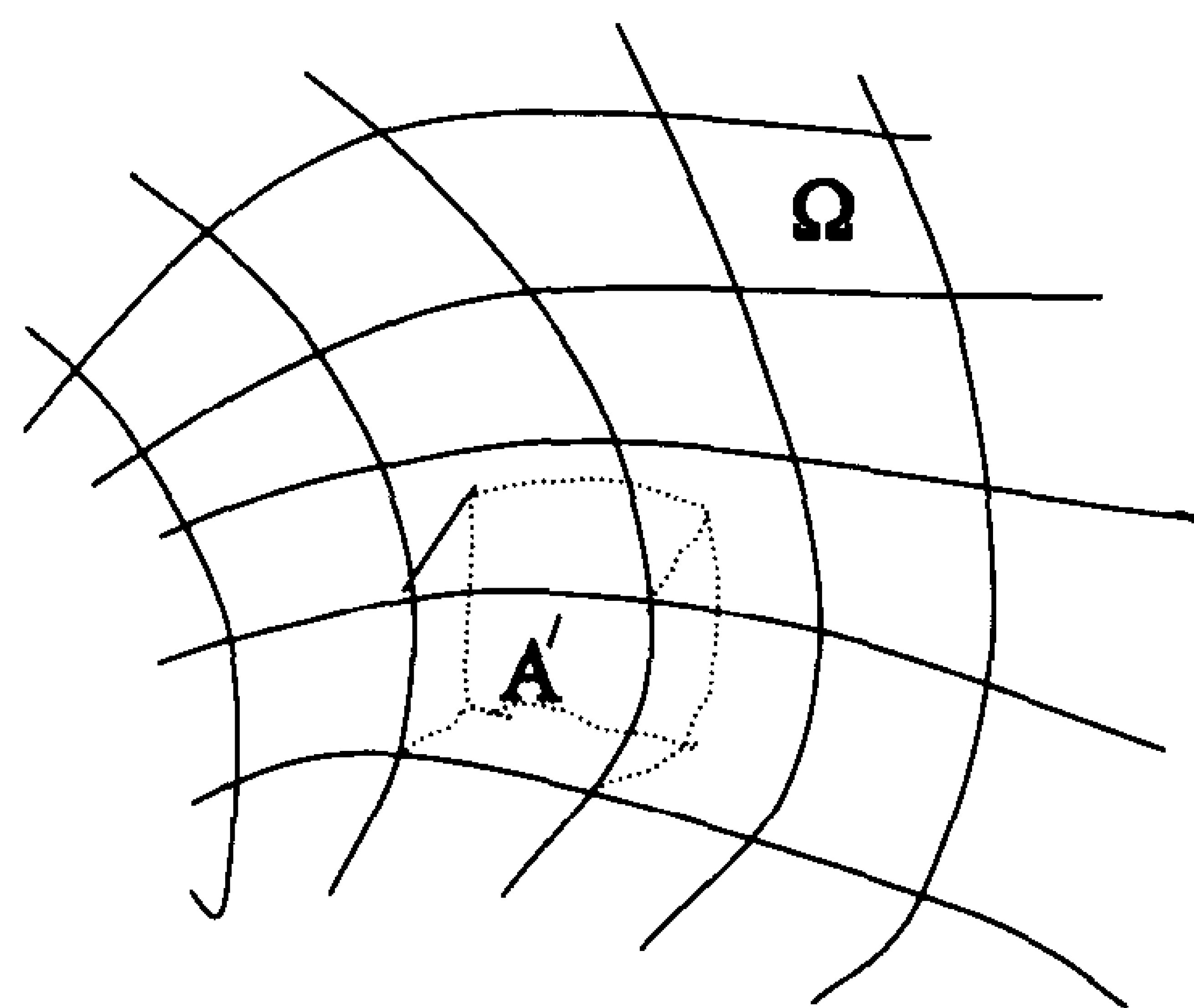


图 1-11(b) 弯曲流形

从场流形的角度来看，空间弯曲的概念已经和爱因斯坦所构想的完全不一致，这里的“弯曲”是以真空存在场流形为基础，且这种“弯曲”并不是场流形整体上的弯曲，而特指场应变所造成的时空弯曲效应，表现为光的传播速度不均匀所导致的传播路径弯曲所构成的时空弯曲。当然这种弯曲效应也存在于任何物质中，因为任何物质都是由量子场构成，而量子场都具有传播特性。具体可参见后面第四章第七节第四点引力质量部分。尽管爱因斯坦本人当时并不承认真空存在物质，但是他所采用的黎曼几何对弯曲时空进行描述的数学工具也是最适合表述协变流形，存在应变的整体流形正是弯曲时空，虽然在我们这里真空充满了场流形，但所表现出的时空弯曲效应和爱因斯坦所构想的弯曲时空在表述上是完

全一致的，所以我们仍然依照以前的习惯，从场流形的观点简要地叙述一下描述整体弯曲场流形的数学内容。

至此，我们对场流形已经建立起一种图像，对于这样的流形来说，和数学流形有很多不同的地方，但最重的是场流形是以物质为基础的流形，而数学流形则是一种抽象的流形，因而场流形的测度是以物质为基础的。

二、协变流形

由前一节中的假设 1 我们知道了真空平直的场流形构成，而对于真空来说，是没有任何可观测效应的，没有可观测效应并不意味着真空是绝对空无的。在统一场中，时间和空间是以场流形为物质基础的，当场流形处于平直状态时，则时空表现为平直时空，所对应的就是真空状态。和相对论不一样的是相对论认为真空不存在物质。 这是统一场论和相对论非常重要的区别。

1. 感知协变

高斯（Gauss）考虑过下述问题。假想有一两维曲面，上面居住着有理智的两维动物，他们能够确定他们的空间是弯曲的吗？仅仅借助在曲面内所做的测量，有可能确定诸曲率要素吗？高斯发现这确实是可以办到的，首先我们依照一种既有规律又相当任意的方式对曲面上的点进行标记，任意两族曲线 x^1 = 常数和 x_2 = 常数构成了坐标系，如图 1-12 所示。

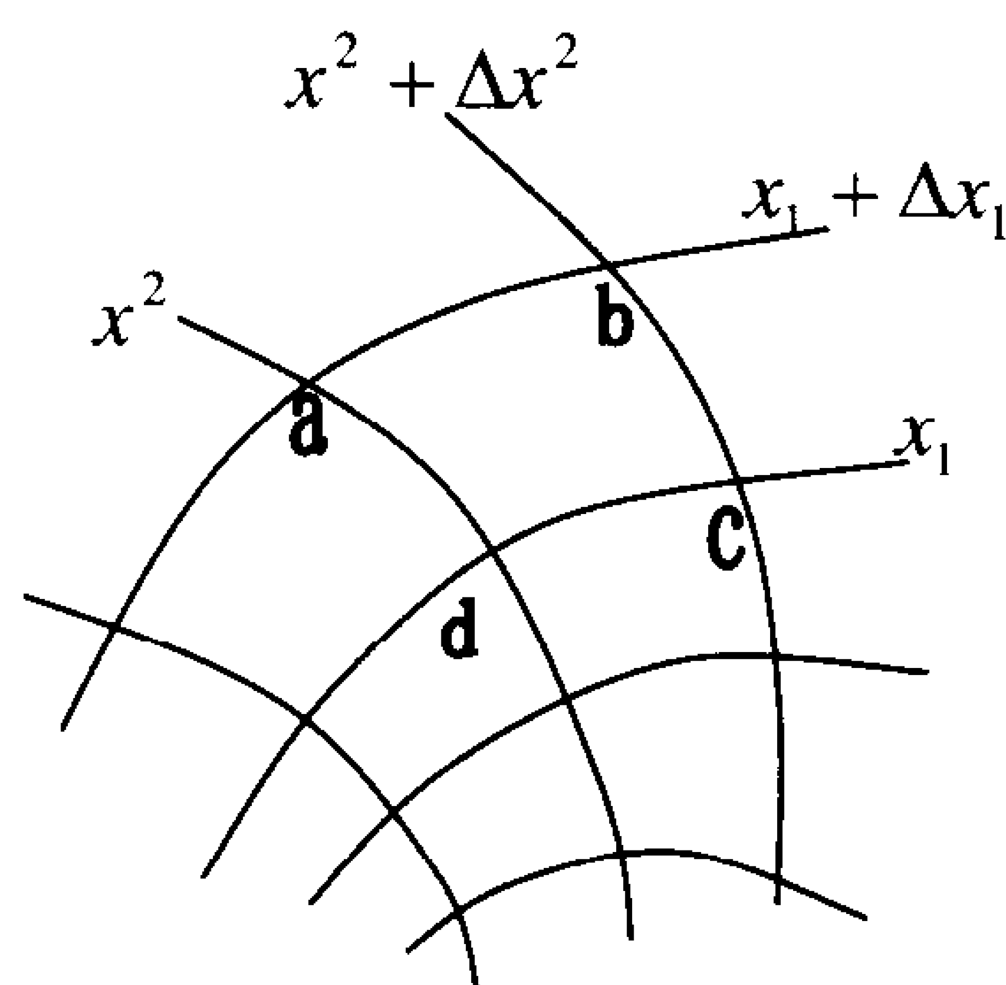


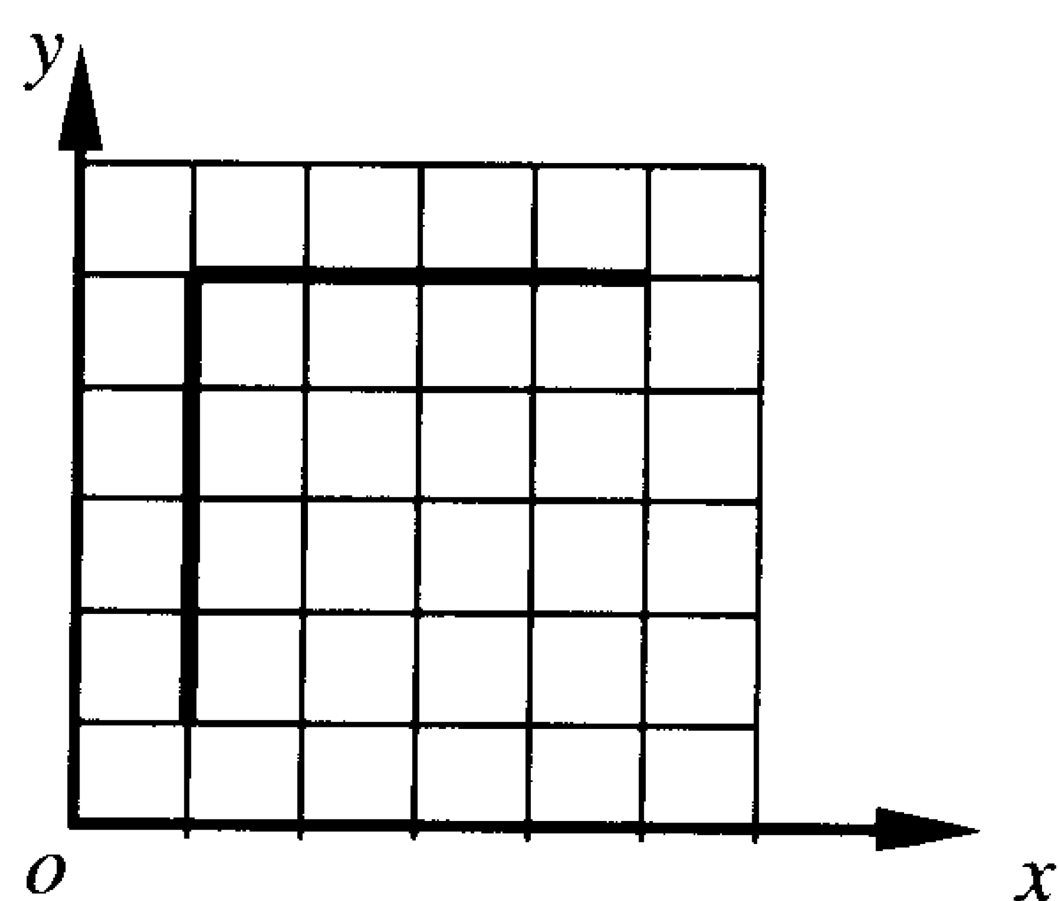
图 1-12　二维弯曲流形

直接测量点 a 和 b 间的长度，得 g_{22}；同样，测量 ac 和 cd 的长度，得 g_{12} 和 g_{11}，高斯得出了一组公式，使曲率可以用度规及其导数表示。

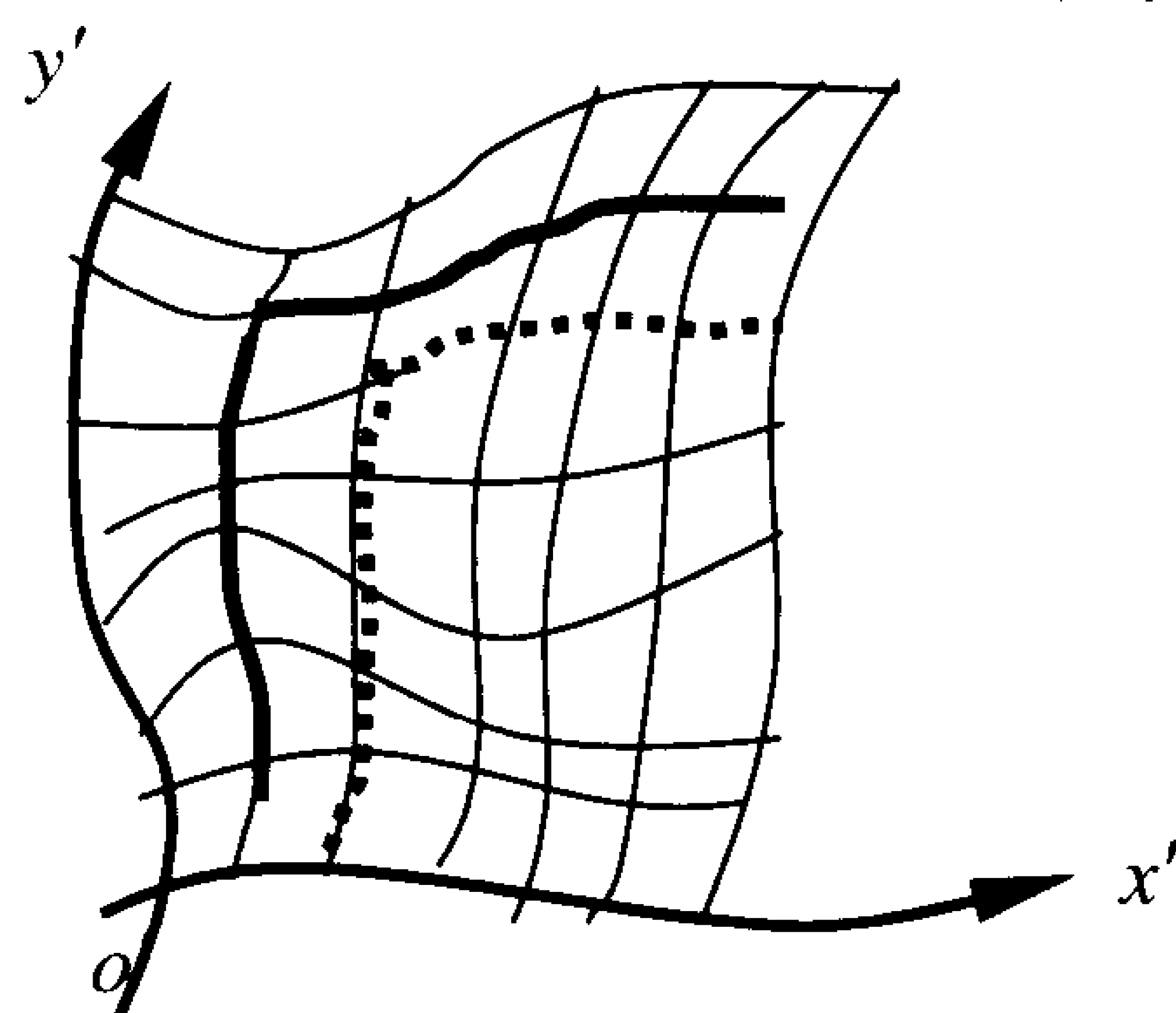
曲率是一种内在的属性，任何一给定点上的曲率在各坐标中均有相同的值。

在这里，尺子和曲面是独立的，互不影响。

现在我们来考虑另一种情况，如果尺子本身是一维的，并且是由构成曲面的同一物质构成，换而言之，尺子不能离开曲面而独立存在，那么就会发生感知协变，如图 1-13 所示。



（a） 平直流形的测量



(b) 感知协变

图 1-13　二维流形的测量

在图 1-13（a）中，对于二维的平直流形，我们可以建立一个最简单的直角坐标系。

设想在这个面上仍然有二维理智动物。二维理智动物和尺子都浸没于二维流形中。

当整个二维流形发生形变时，二维理智动物能够感知吗？此时原来的坐标架由 x，y 变为 x', y',这时我们能够测出坐标变化吗？高斯的方法是否可行？得到的结果十分惊人。

当二维场流形发生形变时，浸没于二维流形中的尺子也发生相应的形变，不仅如此，连理智也随着场流形的形变而发生相应的弯曲（这里的形变是在拉伸压缩极限内的形变，二维场无破损），于是智者用尺子精确测量出来的结果没有任何变化。当然对于在二维流形上运动的波显然也随流形的弯曲而传播的轨迹也发生弯曲，那么这些二维智者便无法感知空间的形态。当把角尺由 A 处移到 B 处时，尺子也随空间发生了改变,A 处和 B 处得到的测量结果完全相同。

这里还要特别值得注意的是由三条边构成的三角形由于平直性和尺子的长度发生协变，因而由三条边构成的角度也发生协变，所以直角在弯曲空间仍为直角（相对于二维弯曲空间的智者）。

这种由于感知和观测一齐随空间改变而改变，最终导致无法感知空间的形态变化，我们称为感知协变。由此可见，高斯所谈及的是尺子、曲面和理智都是相互独立的，满足这样的条件才能感知出二维曲面的形态以及建立相应的几何学。

2. 感知协变的特性

理智和整个二维构成的整个体系都发生相应的弯曲，所以并没有什么异样的感觉，由于感知协变，就存在这样的问题，在图 1-13（a）中的智者认为（b）中的空间是弯曲的，而图（b）中的智者则认为（a）中的空间是弯曲的，这样平直的概念就失去了意义，所以平直成了一种相对意义上词汇，换而言之，感知协变性使平直空间和弯曲空间失去了判别的标准，现只能说两种空间存在差异。

在图 1-13 中，由（a）可以看出（b）的流形是弯曲的，当（a）和（b）是两个独立的坐标系。如果（a）逐渐变为（b）彼此不独立则存在感知协变，当（a）远离（b）时，彼此独立,由（a）可以感知出（b）的形态，而不存在感知协变，因而感知协变是局域的，具有局域性。

以上是考虑的理想化的二维场流形空间的情况，而对于我们所生存的三维空间情况如何呢？

3. 广义协变性

我们人类自身以及各种物质都是由三维场流形不同形式的波而构成的。关于这一点，我们不在这里论述，在了解完以后关于基本粒子结构的章节以后，我们就会理解其含义。

对于场流形在某个区域内的形变的研究，我们能得到相对论的所有结果，对于狭义相对论会有一个清晰而完整的理解。由于我们人类的理智和测量工具都“浸没”于三维场流形中，并由同一的场流形构成。于是我们人类自己不可避免地要发生三维感知协变。

三维场流形在弹性范围内不同形式的形变造成了三维场流形坐标架不同形式的扭曲变形，每一种不同形式的坐标架都对应一个参照系。由于存在感知协变，因而在任意一个扭曲的空间包括动态扭曲，我们无法感知，所有的情况在我们看来和平直空间完全一样，所有的运动规律和运动形式也有任何变化，换而言之，物理学定律由平直流形变为某一形变流形时，没有变化。这表明物理学定律在任何参照系中都应有相同的形式，而且参照系并无优劣之分。这正是广义协变原理。在统一场理论中，广义协变原理是由三维场流形的感知协变性造成的。由于协变流形是时空一起改变,因而也可以称为时空流形。

那么，由于存在感知协变性，空间就不可感知了吗？事实上并非如此，天机还是泄露了。由前面对场流形的假设我们知道，当场流形相对于某个参照场流形发生形变时，若认定参照场流形为“平直”场流形，那么相对于“平直”场流形，则形变场流形的场密度就

会发生改变而造成不均匀性，由于场流形是弹性流形，空间仍然保持三维特性，但有一种恢复平直的趋势。场流形的形变相对于某固定参照系(或某独立场流形)产生了力场，这种力场在某点的大小严格地正此于场流形的相对固定场流形形变程度。于是就可以通过测定引力场的强弱来确定空间场流形的相对弯曲程度，对于三维空间来说，引力场的大小所反映的就是空间弯曲的程度，这正是引力几何化的物理实质。在以后的章节将给出光速不变性原理的解释。我们把某个区域内发生形变的场流形，且这种流形在该区域中呈现出整体形变，这种形变在拉伸和压缩极限的范围以内没有超出拉伸和压缩极限，则仍然保持三维特性。或者形象地说在该区域内场流形没有任何破损，处处连续，这样的场流形称为协变流形，协变流形的研究可以得出相对论。

现在，我们用场流形的观点来理解爱因斯坦创立的广义相对论。从数学的角度看，由于场流形的形变可以用黎曼几何加以描述，我们能精确表述出空间弯曲的程度。而从实验观测来看，虽然存在感知协变，但我们能测出到引力场的大小，把引力场与空间弯曲相结合，就能得出空间弯曲和引力场间的关系，这便是爱因斯坦的引场方程。从而从更高的角度认识了世界。

我们可以建立(或构想)一个独立的数学参照系独立于协变流形，即在局域协变流形以外，于是不存在感知协变，这样我们就能用几何来表述协变流形。

在弯曲空间中，直线由短程线（测地线）所取代，因而光量子是沿测地线传播的。处于局域的弯曲空间内，找不到固定参照系，即自由下落的状态下，我们失去了感知空间形变的依据，于是我们认定空间是平直的, 即 $R_{uv}=0$ 这正是感知协变的结果。

第四节　时间和度规张量

物理学的场流形时空，需要有四个坐标：时间和三个空间坐标 x，y，z。首先要理解的是时间概念，时间的概念由两部分组成，一是经典时间概念，另一个是场流形时间概念。由这两个时间概念便构成了完备的统一场的时间概念。场流形时间概念以后讲，现在先来阐述经典时间概念。

人类建立物理学，首要任务就要描述物体的运动形式并找出运动规律。要表述运动的效果，首先要有一种比较才能得出结论，如下图所示：

考虑两个以上的物体如图1-14所示的A、B、C……

如果全部由a点出发，运动到b点，则会出现有的先到b点，有的则后到b。这样便出现了快和慢的概念，那么如何定量表述呢？我们便选择了A作为运动标准，把所有的B、C……的运动都和A比较，于是我们便有了比较结果：B运动到b点时，A的运动量为6，而A运动到b点时，

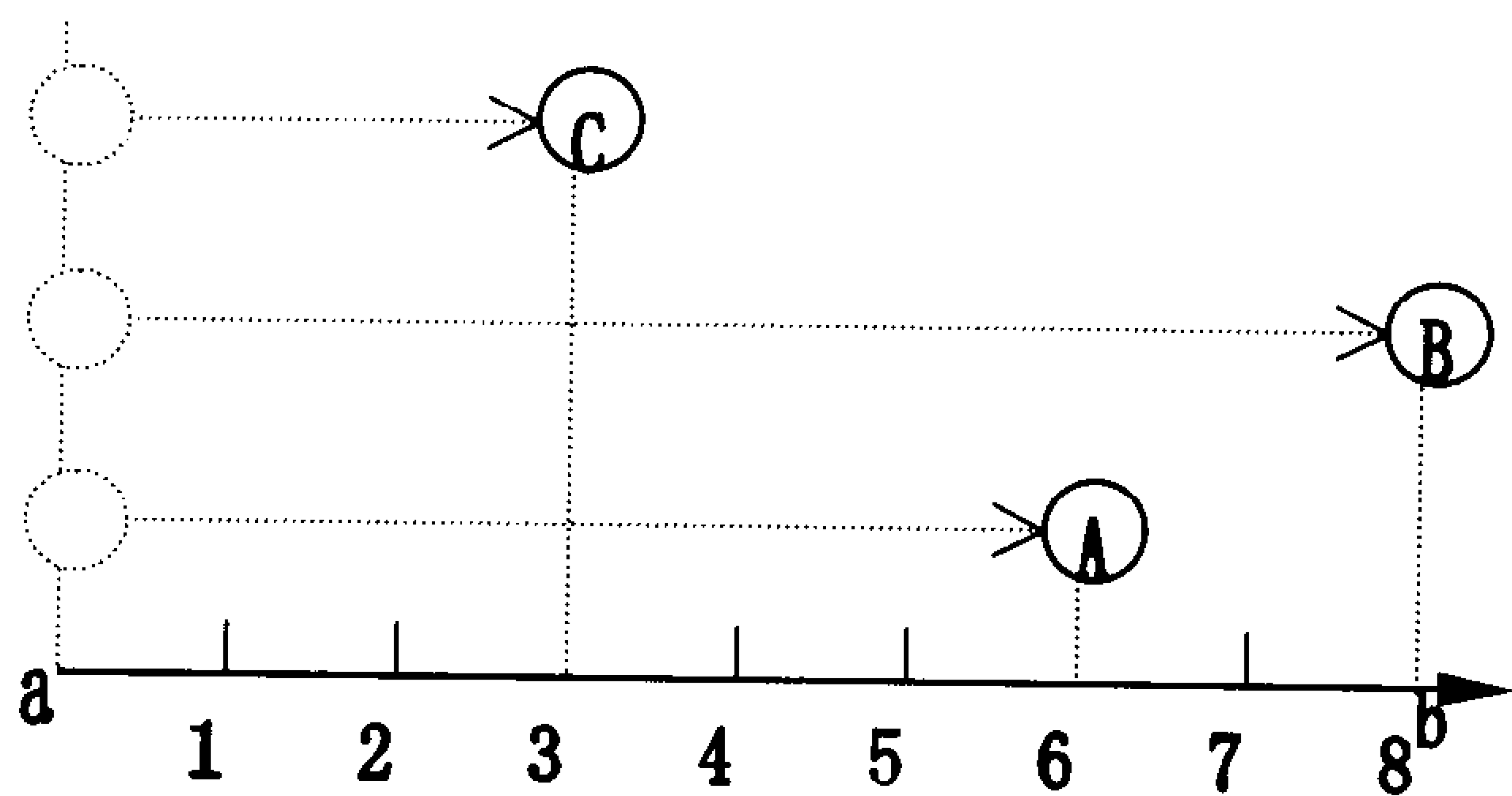


图 1-14　动态测量构成时间

A本身运动的距离量 8，当C运动到b点时，则A的运动量已为 16。进一步我们把A的运动的空间量抽象为一种量值，并赋以A的运动量以时间的概念，于是我们便可以说：B

运动到 b 点花的时间为 6，而 C 运动到 b 所花的时间则需要 16。

显然，作直线运动的物体做基准是很不方便的于是我们找到了做周期运动的物体来做比较的基准，就非常方便了。

如图 1-15 所示，把图 1-14 中 A 的运动轨迹由直线变为圆周均匀运动，并以圆周上的某一点作为起始点，这样又把空间意义上的起始点抽象为圆周上的某一点为起始点来对任何运动形式加以比较。这种把某一作等角速度圆周运动的物体作为基准来比较其它物体的运动效果的系统称为时钟。时钟的运动量称为时间。这便是经典时间概念。

对于图 1-15 所示的当 A 由 a 点出发到 b 点时（a、b 重合）连结 A 和圆心的半径转过了一周，于是我们把等角速度转过一周的运动量用转过了 360° 角度的量来表示，这样便可以把时钟做成任意大小的形状。现在时间给出了一种特别的量纲，时针转一周为 12 小时，分针转一周为一小时，而秒针转 1 周则为 1 分钟。显然这是一种人为规定。

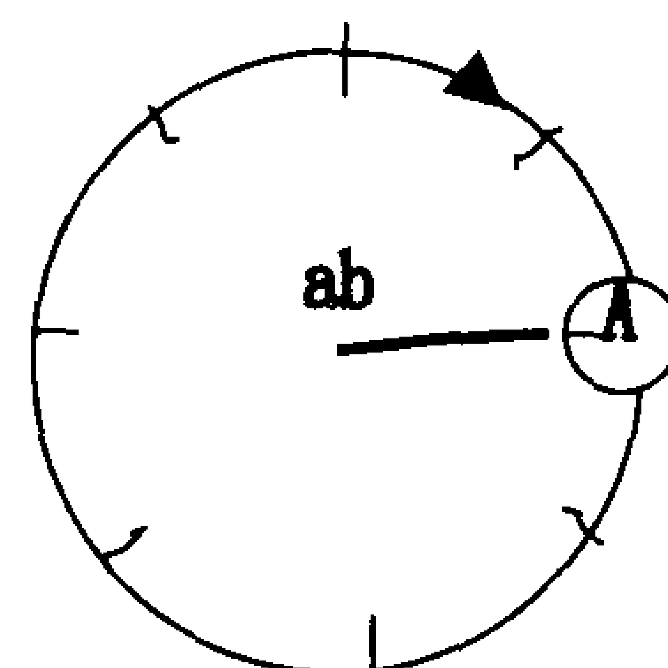
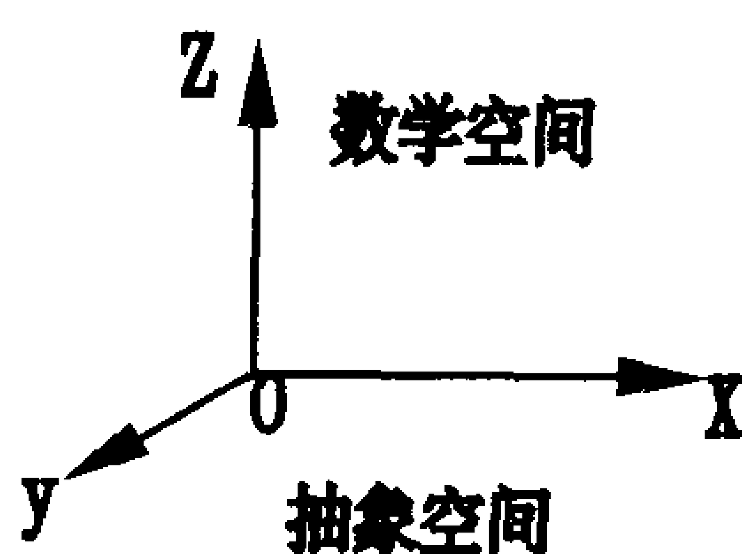


图 1-15　时钟

从经典时间概念来看，时间是由运动的空间效果比较而得出的，所以时间最初也是一种空间量，因而时间和空间是密不可分的，是同一本质的不同表现形式。对于某一区域中一切物体处于静止状态则该区域时间消失。

关于时间的方向是由物质的运动形式而给出的一种印象，并没有什么特别的物理本质。一般认为对于一个多体运动的体系来说，若物体运动越来越无序，即沿熵值增加的方向，我们称时间 t 为正向。实际情况是因为不可能同时存在一种镜向力场，让整个体系的（至少是一个区域）的所有物质按原路径返回。所以不存在反向时间，即使存在运动越来越有序，也不可能沿从前的路径反向运动，所以时间仍是正向，从这种意义上说，时间的前头只有单向，是由运动的不可重复面复性所决定的，某一区域真正严格意义上的反向时间要由该区域所有作运动物质沿原来的路径返回，这样的运动形式不存在。

了解完经典时间概念，我们来了解空间的概念。在研究场流形的性质时，我们知道场流形具有三维的特性。和空间不同的是时间并不具有三维空间维度那样的独立实在的维度，对于三维的空间我们可以建立一个坐标架。这个坐标架是由我们通过抽象思维而构造出来的纯数学的坐架，假如最早的笛卡尔坐标，并标了尺度用以描述我们所观察到的世界。换而言之，我们可以理解成为把数学标架放入场流形中，这种数学标架不随场流形的形变而形变，并能与场流形比较。这样我们就避开了感知协变并能对场流形的弯曲加以表述和研究。



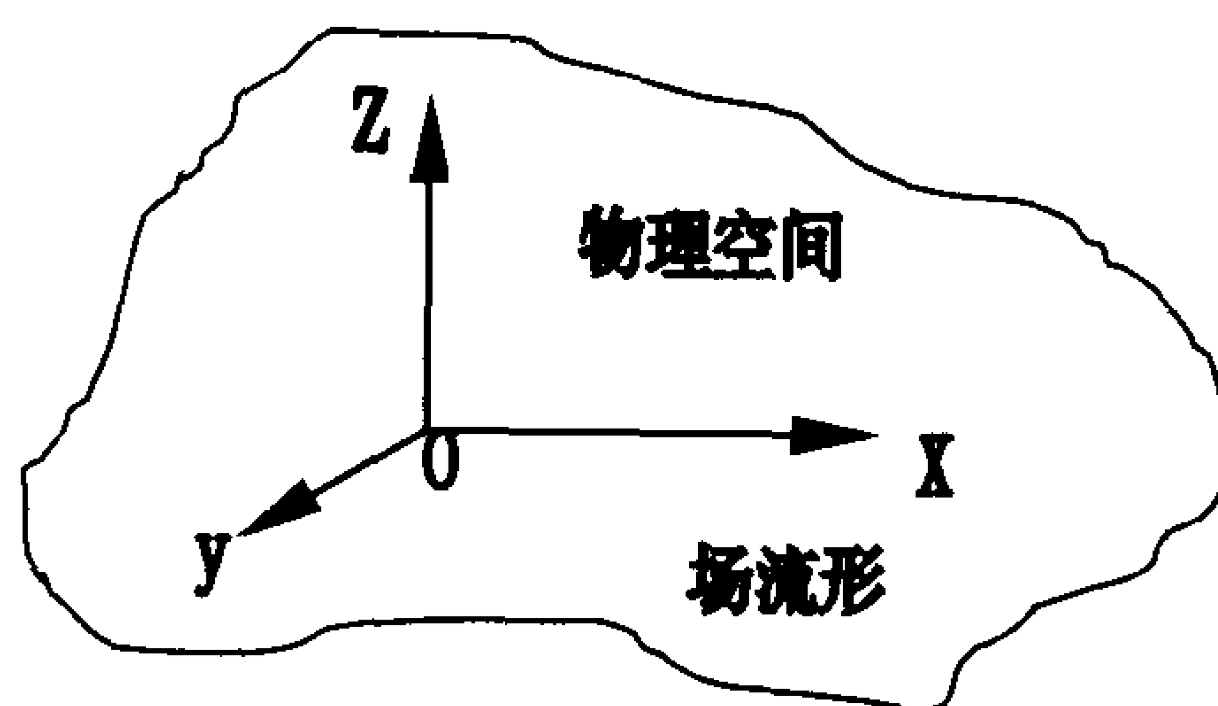


图 1-16　数学空间和物理空间

如上图 1-16 所示，这种嵌入使得场流形有了坐标架和长度的概念，要特别注意的是如果没有这种嵌入，而直接在场流形中建立场流形坐标架，那么坐标架就随场流形的形变而形变；尺度的概念则变为真正意义上的数轴，即表示场流形量的多少。这样使我们不便于

研究问题，并受到感知协变的困扰。

综合前述，我们得到物理学空间的四个坐标，即 x, y, z 以后，我们进行这样的约定，采用上述意义来表述空间，我们直接说时空，而对于把观测者和工具都浸没于三维场流形空间我们称场流形时空，在场流形中存在感知协变，场流形是我们具体感知的场流形空间，具有物理实在性；而对于时空来说，是数学空间映射于场流形中，不存在感知协变，因而具有数学表述的意义，现在的物理学是建立于时空范畴的。时空是三维场流形同一本质的不同表述形式。习惯的做法是把时空流形用四维形式来表述。

对于 x, y, z, t .令

$$t = x^0, \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3$$

于是这四个坐标可写成 x^μ ，μ 取 0，1，2，3 四个值。

我们再取一点，它接近于原先考虑的 x^μ ，令其坐标为 $x^\mu + dx^\mu$ 构成位移的四个量 dx^μ 可以看作一个矢量的四分量，狭义相对论定律允许我们作出坐标的线性非齐次变换，这些变换导致 dx^μ 的线性齐次变换，如果我们适当选择距离和时间的单位，使得光速等于 1(光速不变性在第四章第八节中有论述)，那末由 dx^μ 的这些线性齐次变换，便使得

$$(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds^2 \tag{1-42}$$

为不变量。

在坐变换下按与 dx^μ 同样方式变换的四个量 A^μ 组成的任意集合构成一个逆变矢量，可以把不变量

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A, A) \tag{1-43}$$

叫矢量长度平方，设有另一逆变质量 B^μ ，则有标积不变量：

$$A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = (A, B) \tag{1-44}$$

为了得到这些不变量的一种方便写法，我们引进降低附标的方法，定义

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3 \tag{1-45}$$

那末（1-43）左边的表式可以写作 $A_u A^u$ ，这里应该理解为对 μ 的所有四个值求和，这样（1-44）式可写为 $A_\mu B^\mu$ 或 $A^\mu B_\mu$ 。

（1-45）式引进的四个量 A_μ 也可看作一个矢量的四个分量由于正负号的差别，A_μ 在坐标变换下的变换规律和 A^μ 的稍有不同，这种矢量叫做协变矢量。

由两个逆变矢量 A^μ 和 B^ν ,可以构成十六个量 $A^\mu B^\nu$.附标 μ,ν 取 0、1、2、3 四个值，这十六个量构成一个二秩张量的十六个分量，有时也称做矢量 A^u 和 B^u 的外积，以区别称之为内积的标量 $A_u B^u$ 。

张量 $A_u B^u$ 是一个较为特殊的张量，因其分量之间特殊的关系。但是，我们可以把用这种方法构成的几个张量加起来，得到一般的二秩张量；比方说

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu + A'^\mu B'^\nu + A''^\mu B''^\nu + .\cdots \tag{1-46}$$

一般张量的主要性质是：在坐标变换下，其分量变换的方式和量 $A^\mu B^\nu$ 的相同。

我们可以采用对（1-46）右边的每一项降低附标的方法来降低 $T^{u\nu}$ 中的一个附标，这样我们就可以构成 $T_u^{\ \nu}$ 或 $T_\nu^{\ u}$ 。

在 $T^{u\nu}$ 中，我们可以令 $\nu = \mu$ 而得 $T_\mu^{\ \mu}$.这里要对 μ 的所有四个值求和。一附标在某项中

出现两次一个为上指标,一个为指标，则意味着对此附标求和，称为爱因斯坦求和约定。于是T_μ^μ是一个标量。对于式(1-42) 可用求和约定写成如下形式:

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1-47}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-48}$$

表示。$g_{\mu\nu}$ 称为度规张量。表达式(1-48) 在洛伦兹变换下形式保持不变，称为洛兹度规。

在曲线坐标系中，度规张量取不同的形式，但通过坐标变换将它在整个空间中化为式(1-49) 的形式，只要欧几里德几何在该空间中成立。

第五节　各种张量的变换定律

我们首先假定有 M 个变量$x^1, x^2, \cdots, x^M$.这些变量的一组特定的值被视为维数为 M 的超空间或流形中的一点。这个空间是由所有同这些变量的允许值相应的点构成的。假定我采用一种方法，将这些点标记为$x'^1, x'^2, x'^3, \cdots, x'^M$，使得

$$x'^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^M) \tag{1-49}$$

我们假定导数存在，并写出

$$dx'^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta \tag{1-50}$$

坐标微分 dx^α 被称为逆变矢量的分量。同样，任何一组量F^α，如果遵从变换定律

$$F'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}F^\beta \tag{1-51}$$

便被定义为逆变矢量。

现在考虑象$\partial\varphi / \partial x^\beta$遵从与(1-51) 不同的变换定律，而称任一组按

$$K'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}K_\beta \tag{1-52}$$

变换的量构成协变矢量。

逆变矢量和协变矢量的符号在四维时空中有(1-45) 式的关系。注意，我们对于变矢量和逆变矢量的定义要求在流形上有导数，而不要求有度规存在。我们遵守如下约定：用下标指示协变矢量，用上标指示逆变矢量。

两个逆变矢量A^α和B^β的积满足变换定律

$$A'^\alpha B'^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}A^\nu B^\delta \tag{1-53}$$

我们说，遵从变换定律(1-53) 的一组量$T^{\mu\nu}$构成二秩逆变张量。类似地，遵从变换定律

$$T'_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}T_{\alpha\beta} \tag{1-54}$$

的一组是二秩变张量。任意秩的混合张量遵从变换定律

$$T'^{\mu\nu\cdots}_{\varepsilon\eta\cdots}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\varepsilon}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\cdots T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots} \tag{1-55}$$

另一些量按定律

$$T'^{\mu\cdots}_{\varepsilon\cdots}=J^{w}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\varepsilon}}\cdots T^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}$$

变换。式 J 是雅可比(Jacobi) 行列式$\left|\partial x^{k}/\partial x'^{l}\right|$。上标 W 是 J 的自乘的次数。$T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ 叫做权重 W 的张量密度。设有函数S，变换后为S'，若对于所有的坐标系$S=S'$在每一点上均成立，则称S为不变量或标量。

一个量一经给定，其形式便提供了获得它在其他坐标系中的值的方法。于是，若$T_{\mu\nu}=A_{\mu}B_{\nu}$,则在另一坐标系中$T'_{\mu\nu}=A'_{\mu}B'_{\nu}$。

一协变矢量和一逆变矢量之积$A_{\lambda}B^{\lambda}$按如下方式变换:

$$A'_{\lambda}B'^{\lambda}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}A_{\mu}B^{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}A_{\mu}B^{\nu}=A_{\nu}B^{\nu} \tag{1-56}$$

所以积是标量。由此还可以得出高秩张量的内积(对上下标求和) 也是标量。这些性质可用于张量特性的检验。如果$A_{\mu}B^{\mu}$是不变量，则我们可以证明A_{μ}是张量，因为

$$A_{\mu}B^{\mu}=A'_{\mu}B^{\alpha}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \tag{1-57}$$

α,μ为哑指标，可以用任意方的字母表示，于是(1-57) 可写成

$$(A_{\mu}-A'_{\nu}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}})B^{\mu}=0 \tag{1-58}$$

由(1-58) 得出,A_{μ}按$A_{\mu}=A'_{\nu}\partial x'^{\nu}/\partial x^{\mu}$变换，故称协变矢量。

克罗内克尔 δ 记号(Kronecker delta)δ^{ν}_{μ} 是一个当 $\mu=\nu$时为 1，当 μ时为零的量。

$$\delta^{\nu}_{\mu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\delta'^{\beta}_{\alpha} \tag{1-59}$$

显然δ^{ν}_{μ}是混合张量。

若张量$S^{\mu\nu\alpha}=S^{\nu\mu\alpha}$，即换两个指标不变号，则称张量$S^{\mu\nu\alpha}$关于指标 μ 和 ν 是对的。若$A^{\alpha\beta\gamma}=-A^{\beta\alpha\gamma}$，则称张量关于指标 α 和 β 反对称的(或斜对称) 。由写出的变换定律即可看到，若一对指标同为上标或下标，张量的对称性在坐标变换下保持不变。一般来说，如果一指标是下标，另一指标是上标，则对称性不能保持。因此，对称性仅对同类指标才有意义。

由变换定律指出，一给定张量的所有分量，若在一坐标中为零，则在一切坐标系中均为零。这一事实在理论物理学中具有重大的意义。如果一个定律写成张量形式，譬如说，二张量相等的形式，那么二张量之差在一切坐标系中均为零，可见个定律的有效性与选用的坐标系无关。类似地，如果我们在一个特殊坐标系建立了张量方程，那么它在任何坐标系

中均成立。

用张量来表述物理学定律，使我们对物理学有一种极为优美的表述形式，我们不再拘泥于某种特定的描述空间，所对应的物理事实是对于某一物理规律我们不论用何种手段何种工具来描述都不会改变所描述的物理规律。要注意的是描述工具的不同并不改变所描述的场流形结构。

我们曾看到，标量的导数构成协变矢量，但是，协变矢量的导数却满足张量所要求的变换定律。因为

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma}=\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}A'_\alpha\right)=\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta}+A'_\alpha\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma\partial x^\rho} \tag{1-60}$$

注：上述关于张量的变换定律以及后面的黎曼几何某些表述可参见[美]J.韦伯(J.Weber)所著《广义相对论与引力波》，科学出版社,1979 年出版。

需要一种新的导数协变导数，允许我们由张量的微分得到一新张量。为了说明怎样才能得到，我们必须考虑矢量平行位移的概念。

第六节　向量的平移与协变微分

欧氏空间采用统一直线标。两个不同点上的向量只要分量相同，就认为他们是相同的，或者说两个向平行，或一个是由另一个平移而来。这种平移称普通平移。

然而在黎曼空间中，普通平移是没有意义的。因为不同点有不同的切标架，不同点的向量就是有相同的分量也不能认为它们是相等的。

勒维－奇维塔引了一个广义的“平移”概念。设嵌入三维欧氏空间的二维曲面上，有一个起始点在 M 的向量 **A**。若要将 **A** 经过无限小距离平移 M 的无限小邻域内某一 M' 上，按勒维－奇维塔的定义：先将 $\vec{A}$ 按普通平移至 M'，然后曲面在 M' 的切平面上投影得向上量 $\vec{A}'$。这个向量 $\vec{A}'$ 就称为由点 M 的向量 $\vec{A}$ “平移”而来，或 $\vec{A}'/\!/\vec{A}$。我们将这种平移称为勒维－奇维塔平移。

设三维欧氏空间 E_3 中的二维黎曼空 R_2 的坐标系为 $\{u^i\}$ $(i=1,2), R_2$ 中有曲线 C，其参数方程为

$$u^i=u^i(t)$$

当 t 由 t 变至 $t+dt$ 时，曲线上的点由 $M(u^i)$ 变至 $M'(u^i+du^i)$。这时点 M' 在点 M 的无限小邻域内。

设在 E_3 中，R_2 在点 M 和 M' 的切空间(切平面) 分别记为 T_M, T'_M；再记 R_2 中每的向径为 $\vec{r}=\vec{r}(u^i)$。显然，曲线 C 上各点切标架虽然分别在各自的切空间内，但并非彼此无关。设点 M 处的切标架向量为

$$\vec{E}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^i}\bigg|_M=\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\bigg|_M\vec{e}_\alpha$$

其中 $\vec{e}_\alpha$ (α =1,2,3) 为 E_3 中选取某个固定架(直线坐标系) 的标向量，$x^\alpha=x^\alpha(u^i)$ 为 $\vec{r}$ 在 $\{0-\vec{e}_\alpha\}$ 中的标。于是点 M' 处的切标架向量为

$$\vec{E}_i' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\Big|_{M'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\Big|_{M'}\vec{e}_\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} du^j\right)\Big|_M \vec{e}_\alpha$$

$$= \vec{E}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}\Big|_M du^j \tag{1-61}$$

考察 $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}\Big|_M$ ，这仍是点 M 的量，但一般只在 E_3 中，不在 T_M 中。设过点 M 作 T_M 的向量 $\vec{n}$，于是向量 $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}$ 可表示为

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{E}_k + \Omega_{ij}\vec{n} \tag{1-62}$$

其中 Γ_{ij}^k 为 $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}$ 在 T_M 中的投影向量关于 M 点切标架 $\{\vec{E}_i\}$ 的分, Ω_{ij} 为其法向量分量。

将(1-67) 代入(1-61) 式得

$$\vec{E}_i' = \vec{E}_i + \Gamma_{ij}^k du^j \vec{E}_k + \Omega_{ij} du^j \vec{n} = (\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k + \Omega_{ij} du^j \vec{n}$$

上式表明, 从 E_3 来看(图 1-17): M' 处的切标架向量 $\vec{E}_i'$ 经普通平移至点 M 后, 为 T_M 中的向量 $(\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k$ 和法线上的向量 $\Omega_{ij} du^j \vec{n}$ 之和。由于 $\vec{n}\perp T_M$,故向量 $\vec{E}_i' - \Omega_{ij} du^j \vec{n}$ 就是 E_i' 在 T_M 中的投影向量, 即 $(\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k$ 。

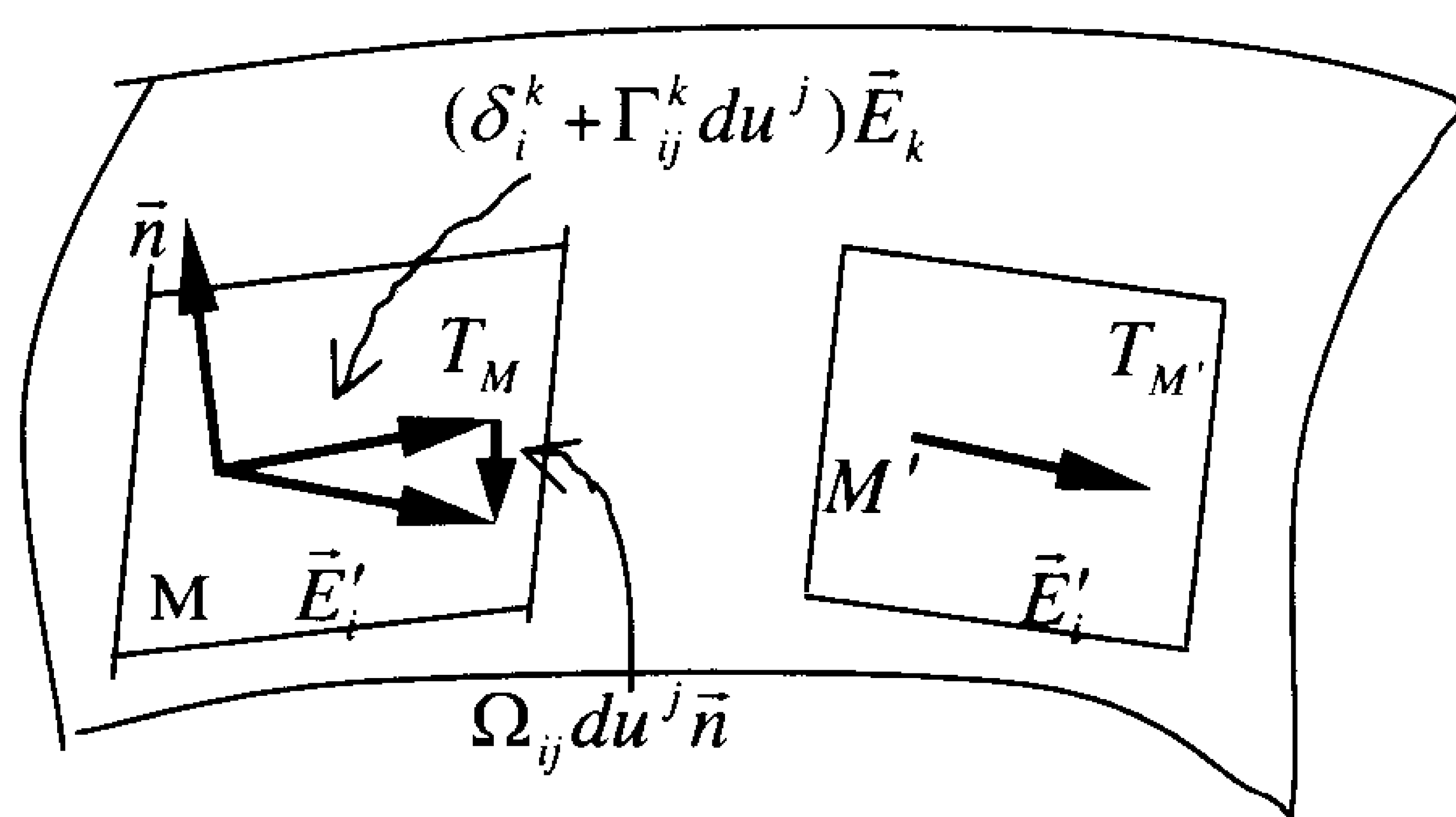


图 1–17 向量平移

根据勒维一奇维塔平移的定义, 上述向量正好是向量 $\vec{E}_i'$ 从点 M' 按勒维一奇维塔平移至点的结果。因此有

$$(\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k // \vec{E}_i'$$

现设点 M' 处有向量 $\vec{A}'$, 按勒维一奇维塔平移至点 M。我来求该向量平移前后坐标的关系。

设 $\vec{A}' = A'^i \vec{E}_i$

则有: $A'^i (\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k // A'^i \vec{E}_i'$。

记 $\vec{A}'$ 平移至点 M 后的向量为 $\vec{A} = A^i \vec{E}_i$.即

$$A^i \vec{E}_i = A'^i (\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k = (A'^k + \Gamma_{ij}^k A'^i du^j)\vec{E}_k$$

改换上式右端的哑指标，比较 $\vec{E}_i$ 的系数得

$$A^i = A'^i + \Gamma_{jk}^i A'^j du^k \tag{1-63}$$

$$\delta A^i = A'^i - A^i \tag{1-64}$$
$$= -\Gamma_{jk}^i A'^j du^k$$
$$= -\Gamma_{jk}^i (A^j + \delta A^j) du^k$$

略去二阶无穷小量，我们得到

$$\delta A^{i} = -\Gamma_{jk}^{i} A^{j} du^{k} \tag{1-65}$$

$$A'^{i} - A^{i} = \Gamma_{jk}^{i} A^{j} du^{k}$$

$$A'^{i} = A^{i} + \Gamma_{jk}^{i} A^{j} du^{k} \tag{1-66}$$

这就是我们要求的向量平移后坐标的关系。可以证明，在 R_2 平移阶变张量 A_i 时有

$$\delta A_{i} = \Gamma_{jk}^{i} A_{j} du^{k} \tag{1-67}$$

以及

$$A_{i}' = A_{i} - \Gamma_{ik}^{j} A_{j} du^{k} \tag{1-68}$$

若将 R_2 改为 R_n， E_3 改为 E_m,推导过程将完全一致。只要将 i 看作取值 $1,2,\cdots,n$，(1-65)、(1-66) 、(1-67) 、(1-68) 就是所考察的是平滑弯曲的情况，所对应的物理空间是协变流形。现在来看一种很有趣的二维流形，考查在局域协流形中二维曲面上有一个小阱(或小蛀洞) 。如图 1-18。

在前面如图 1-17 是二维曲面中，如果和这个小阱相比，曲面弯曲的程度很小，为使问题简化，我可以把阱附近的邻域认为是平直的,这样我们可以近似认为在一个水平面上，在 M' 处出了一个小阱，小阱的深度为 A，而小阱的截面积为 g，我们可以认为小阱的通道大小为 g。

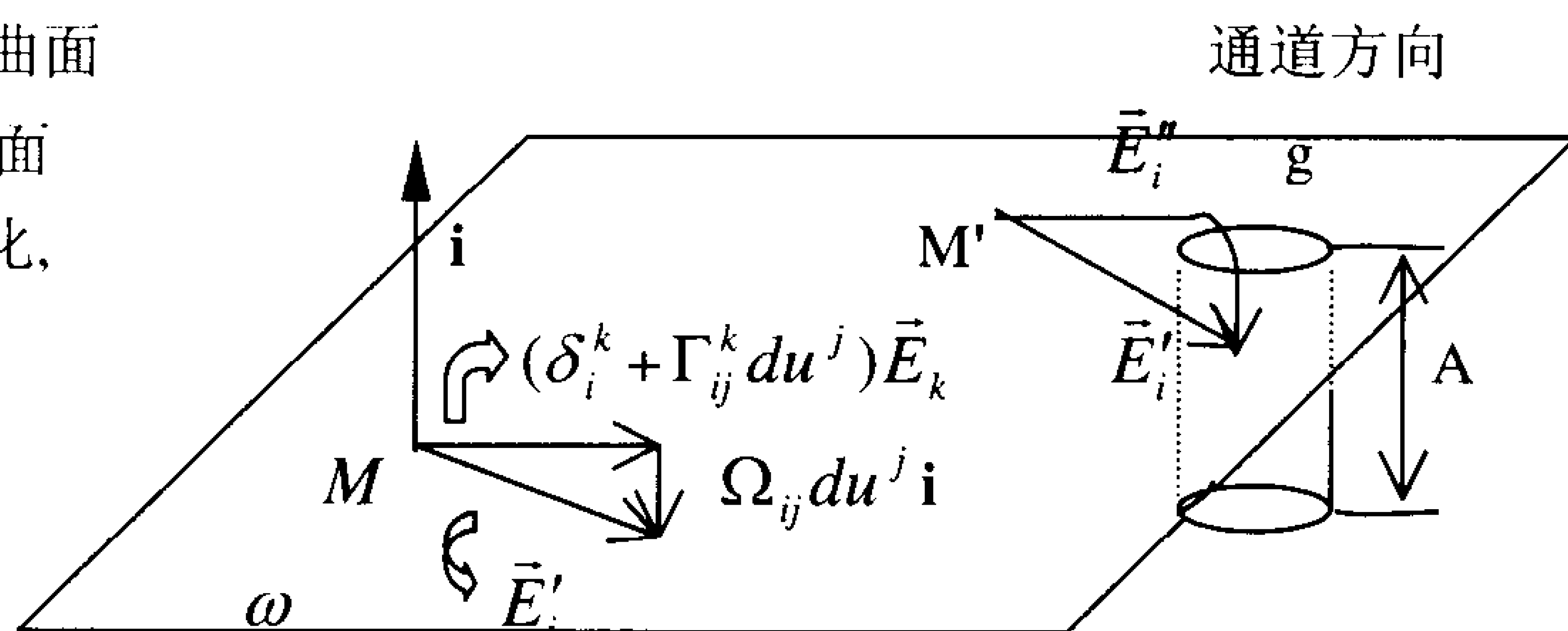


图 1-18 二维面上的阱

由于蛀洞的出现,M' 处的切向量发生弯曲而成为 $\vec{E}_i''$，平行边法则知 $\vec{E}_i''$ 等价于 E_i'，于是我们可以认为由于洞的存在，M' 的切向量为 $\vec{E}_i'$。

由图 1-18，我可以看出如果没有这个小阱，那么 M' 点的切向量长度为 $\vec{E}_i$,小阱的正好在切矢量的终点上，于是切矢量被拉入阱中，被拉的方向平行于阱的通道。阱对于二维平面来说不在二维面上，但可以把这个阱想像为弹性二维面凹陷造成的蛀洞。$\vec{E}_i'$ 在二维面上的投影值为 $(\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k$， $\vec{E}_i'$ 在沿阱的通道方向上的投影值则沿 **i**，其值为 $\Omega_{ij} du^j \mathbf{i}$。在 ω 上的投影值为 $(\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k$。如图 1-18 所表明的。

$$\begin{aligned}\vec{E}_i' &= \vec{E}_i + \Gamma_{ij}^k du^j \vec{E}_k + \vec{i}\,\Omega_{ij} du^j \\ &= (\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k du^j)\vec{E}_k + \vec{i}\,\Omega_{ij} du^j\end{aligned} \tag{1-69}$$

和前面的推理完全一致，在 ω 中平移的一阶协变张量 B_i 有

$$\delta B_{i} = \Gamma_{ik}^{j} B_{j} du^{k} \tag{1-70}$$

该量反应了蛀洞对 $\vec{E}_i'$ 的影响，换而言之蛀洞使 ω 产生了特殊的时空形变。现在我们来具体

看一下Γ_{ij}^{k}。

(a) 若通道越粗，则拉伸量也就越大，$g \propto \left|\Gamma_{ij}^{k}\right|$；

(b) 若阱越深，则拉伸的量也会越大，$A \propto \left|\Gamma_{ij}^{k}\right|$。

综合上面(a),(b)，我们可把Γ_{ij}^{k}写为

$$\Gamma_{ij}^{k} = g \cdot A \tag{1-71}$$

这样我们可以把(1-66) 写为

$$\vec{E}_i' = \vec{E}_i + gAdu^j \vec{E}_k \tag{1-72}$$

$\delta\vec{E}_i = gA\vec{E}_i$，为了在形式上进行统一表述，我们可以把上式表述为

$$\vec{E}_i' = (\delta_i^k + gAdu^j)\vec{E}_k \tag{1-73}$$

设$\vec{A}' = A'^i \vec{E}_i$，类似的，我们有

$$\delta A^i = -\Gamma_{jk}^{i} A^j du^k \tag{1-74}$$

和

$$\delta A_i = \Gamma_{jk}^{i} A_j du^k \tag{1-75}$$

其中$\Gamma_{ij}^{k} = g \cdot A$，如果空间的弯曲相对于阱来说是不可忽略的，那么就不能忽略联络系数。

$$\delta A_i = (\Gamma_{jk}^{i} + gA) A_j du^k \tag{1-76}$$

形象地说就是弯曲的二维流形上有蛀洞。这种有蛀洞场流形对于相互作用量子场至关重要，我们可以把量子场相互作用通道效应理解为量子场流形存在蛀洞。

考虑了平移的两种情况，现在我们通过下列变换重新回到局部笛卡尔坐标系上来：

$$x^\alpha = f^\alpha(x'^1, x'^2, \cdots), \qquad x'^\alpha = \varphi^\alpha(x^1, x^2, \cdots). \tag{1-77}$$

这里带撇的坐标是局部笛卡尔坐标，于是

$$dx^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x'^\beta} dx'^\beta \tag{1-78}$$

由平行位移的定义得出$\delta(dx'^\beta) = 0$，于是由(1-78)可写出

$$\delta(dx^\nu) = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} dx'^\delta dx'^\gamma = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{1-79}$$

由(1-65) 式更换附标，得

$$\delta A^\nu = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} A^\alpha dx^\beta \tag{1-80}$$

令A^ν代表坐标微分dx^ν，则有

$$\delta(dx^\nu) = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} dx^\alpha dx^\beta \tag{1-81}$$

(1-79) 式和(1-81) 比较，得

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = -\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\beta} \tag{1-82}$$

式(1-82)并不遵从张量的变换定律，我们要找到用度规张量来表达的$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$的公式。我们先回忆一下度规张量的定义和度规的两个公式。

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1-83}$$

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta^\alpha_\mu \tag{1-84}$$

$$A^\alpha = g^{\nu\alpha}A_\nu \tag{1-85}$$

现在我们来推导用度规张量表达$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$的公式。由平行位移的定义得

$$\delta(A_\mu A^\mu) = g_{\mu\nu}(\text{第二点})[A^\nu + \delta A^\nu][A^\nu + \delta A^\nu] - g_{\mu\nu}(\text{第一点})A^\nu A^\mu \tag{1-86}$$

完成这些运算，得

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}A^\mu A^\nu dx^\alpha + g_{\mu\nu}A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu}A^\nu \delta A^\mu = 0 \tag{1-87}$$

利用式(1-80) 消去δA^ν和δA^μ，得

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\ \nu\alpha} - g_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\ \mu\alpha} = 0 \tag{1-88}$$

由于$\Gamma^\beta_{\nu\alpha}$ 对于下标对称，故可将指标μ和α互换，于是得

$$\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\ \nu\alpha} - g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\ \mu\nu} = 0 \tag{1-89}$$

类似的，我们写出

$$\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - g_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\ \mu\alpha} - g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\ \mu\nu} = 0 \tag{1-90}$$

对式(1-88) 、(1-89) 、(1-90) 求解，并利用(1-84) ，得

$$\Gamma^\gamma_{\ \mu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\gamma\nu}[\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}] \tag{1-91}$$

称为第二类克里斯托菲(Christoffel) 符号，往往写作$\begin{Bmatrix} \gamma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix}$。

三指标量

$$\frac{1}{2}[\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}] = \Gamma_{\nu,\mu\alpha} \tag{1-92}$$

称为第一类克里斯托菲符号，往往写作$[\mu\alpha,\nu]$。

现在我们来考虑坐标变换时联络系数的变换规律。考虑嵌入高维欧氏空间。设其坐标变换为

$$u'^\beta = u'^\beta(u^\nu), \quad \det(\frac{\partial u'^\beta}{\partial u^\nu}) \neq 0 \tag{1-93}$$

设点 M 在$\{u'^\beta\}$与$\{u^\beta\}$中的切标架分别为

$$\vec{E}'_\beta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u'^\beta} \quad , \qquad \vec{E}_\beta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\beta}$$

改变坐标系：

$$\vec{E}'_\beta = \frac{\partial u^u}{\partial u'^\beta}\vec{E}_\mu \quad \text{(a)} \quad , \qquad \vec{E}_\beta = \frac{\partial u'^\delta}{\partial u^\beta}\vec{E}'_\delta \quad \text{(b)}$$

将(a)再对u'^{β}求导并注意复合函数的微分法，有

$$\vec{E}'_{\beta\nu}=\frac{\partial E'_{\beta}}{\partial u'^{\nu}}=\frac{\partial^2 u^{\mu}}{\partial u'^{\beta}\partial u'^{\nu}}\vec{E}_{\mu}+\frac{\partial u^{\mu}}{\partial u'^{\beta}}\frac{\partial u^{k}}{\partial u'^{\nu}}\vec{E}_{\mu k}$$

由(1-61) 知，上述等式两端的向量已不再R_n的切空间中，不过既然相等，则它们在切空间内投影向量必然相等，因此两边取其切空间的投影，则有

$$\Gamma'^{\delta}_{\beta\nu}\vec{E}_{\delta}=\frac{\partial^2 u^{\mu}}{\partial u'^{\beta}\partial u'^{\nu}}\vec{E}_{\mu}+\frac{\partial u^{\mu}}{\partial u'^{\beta}}\frac{\partial u^{k}}{\partial u'^{\nu}}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu k}\vec{E}_{\alpha}$$

$$=(\frac{\partial^2 u^{\mu}}{\partial u'^{\beta}\partial u'^{\nu}}+\frac{\partial u^{\mu}}{\partial u'^{\beta}}\frac{\partial u^{k}}{\partial u'^{\nu}}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu k})\frac{\partial u'^{\delta}}{\partial u^{\alpha}}\vec{E}_{\delta}$$

比较$\vec{E}_{\delta}$的系数，我们得到

$$\Gamma'^{\delta}_{\beta\nu}=\frac{\partial u'^{\delta}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial u'^{\beta}}\frac{\partial u^{k}}{\partial u'^{\nu}}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu k}+\frac{\partial u'^{\delta}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial u'^{\beta}\partial x'^{\nu}} \tag{1-94}$$

由(1-94)和$g^{\alpha\beta}$的变换定律可知

$$[\mu\alpha,\nu]'=\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u'^{\mu}}\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial u'^{\alpha}}\frac{\partial u^{\delta}}{\partial u'^{\nu}}[\beta\gamma,\delta]+g_{\beta\gamma}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u'^{\nu}}\frac{\partial^2 u^{\gamma}}{\partial u'^{\mu}\partial x'^{\alpha}} \tag{1-95}$$

由(1-94)和(1-95)的第二项可知，克里斯托菲符号不满足张量变换定律，因而不是张量。对式(1-94) 的研究表明，总能设法选择这样的坐标系，使得某点上的所有克里斯托菲符号均化为零。譬如，可采用下面方法，我们将给定点记作 p，并假定该点的克里斯托菲符号不等于零。施行坐标变换

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}-x^{\alpha}{}_{(p)}+\frac{1}{2}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta(p)}(x^{\beta}-x^{\beta}{}_{(p)})(x^{\delta}-x^{\delta}{}_{(p)}) \tag{1-96}$$

这里下标(p)指示在点p的值。利用式(1-94) 直接算出$\Gamma'^{l}{}_{k\mu}$的新值，便可以看出，这些新值在点p上为零。这就证明了克里斯托菲符号可以变为零。因为凡在克里斯托菲符号在点p为零的坐标系称为短程线坐标系；p叫做极点。此外，借助于坐标变换不能将一条曲线上的克里斯托菲符号化为零。

克里斯托菲符号本质是用理想平直数学空间测量同维场流形而得到的差异。克里斯托菲符号不为零，即$\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}\neq 0$，$\Gamma_{\nu,\mu\alpha}\neq 0$，表明存在差异。而克里斯托菲符号为零则表明有两种情况：

a. 我们被测量的场流形和测量工具理想平直流形无任何差异，换而言之，被测场流形为平直场流形。克里斯托菲符号为零。

b. 由于感知协变的存在，我们的测量工具“理想平直流形”因没有一个固定的参照系而浸没于被测场流形中，失去了独立性，也随被测场流形的形变而形变。这样便无法感知被测场流形的形变。显然这种测量的结果是克里斯托菲符号为零。这种能使测量工具丧失独立性而发生感知协变的特殊的参照系就是短程线。因而短程线在场流形里有特别的意义。在前面，我们曾说过测量工具“理想平直流形”和被测流形之间的差异($\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}\neq 0$，$\Gamma_{\nu,\mu\alpha}\neq 0$)表现为存在力场，差异越大则力场就越强($\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}\propto \mathbf{F}$)。当进入短程线进行测量时，发生感知协变则$\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}=0$，$\Gamma_{\nu,\mu\alpha}=0$,即力场 **F** 消失，换而言之我们在短程线标架上

因存在感知协变而无法感知力场的存在。通俗地说，自由下落的升降机内的人就处于短程线标架中，升降机内的人认为自己处于平直流形中而无力场存在。实际的情况是升降机所处的背景流形是弯曲的。

我们回到用微分构成新张量的问题上来，由前面我们知道矢量的偏导数不是张量。但按下述方法可以构成一种新的导数。

在一给定点的矢量为 A^μ，某邻点上的矢量为 $A^\mu+\mathrm{d}A^\mu$。将矢量 A^μ 平移至该邻点而得的矢量为 $A^\mu+\delta A^\mu$。将以上两个量相减，得

$$dA^\mu-\delta A^\mu=(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\mu_{\ \sigma\alpha}A^\alpha)dx^\sigma \tag{1-97}$$

由于是同一点的二矢量之差，所以上式必为一矢量，因而量

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\mu_{\ \sigma\alpha}A^\alpha$$

为混合张量。称为 A^μ 的协变导数，并写作

$$A^\mu_{\ ;\sigma}=\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\mu_{\ \sigma\alpha}A^\alpha \tag{1-98}$$

由(1-75) 式和类似于推导(1-97) 和(1-98) 所用的方法，我们可以得到 A^μ 的协变导数

$$A_{\mu;\sigma}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma}+\Gamma^\alpha_{\ \mu\sigma}A_\alpha \tag{1-99}$$

协变微分是一个很重要的概念，我们可以找到协变微分的几何解释。我们将向量 $\vec{A}(p)$ 的普通微分记为

$$d\vec{A}=\vec{A}^0-\vec{A}(p) \tag{1-100a}$$

协变微分记为

$$D\vec{A}=\tilde{\tilde{A}}-\vec{A}(p) \tag{1-100b}$$

其中 $\vec{A}^0$，$\tilde{\tilde{A}}$ 为点 p' 处的场向量 $\vec{A}(p')$ 分别按 E_3 中普通平移与 R_2 上勒维－奇维塔平移至点 p 的向量，见下图 1-19

$$\begin{aligned}d\vec{A}&=d(A^i\vec{E}_i)=(dA^i)\vec{E}_i+A^id\vec{E}_i\\&=(dA^i)\vec{E}_i+A^i\vec{E}_{ik}du^k\\&=(dA^i)\vec{E}_i+A^i(\Gamma^j_{ik}\vec{E}_j+\Omega_{ik}\vec{n})du^k\\&=(dA^i+\Gamma^i_{jk}A^jdu^k)\vec{E}_i\\&\quad+A^i\Omega_{ik}du^k\vec{n}\\&=D\vec{A}+\delta\end{aligned} \tag{1-101}$$

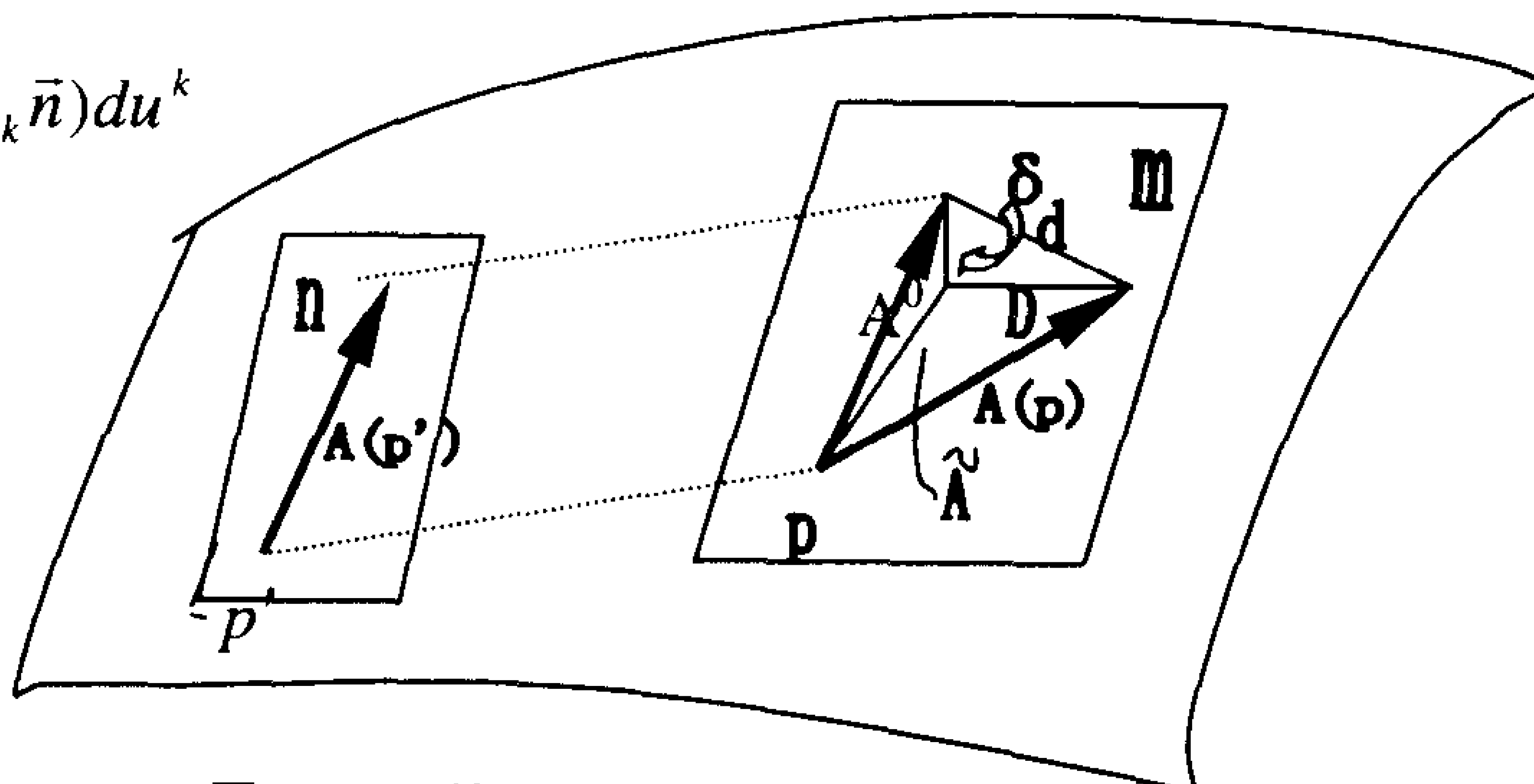


图 1-19　协变微分的几何意义

$\vec{A}(p)$ 与 $\vec{A}(p')$ 分别为向量场在点 p 与 p' 的场向量(分别在两个切空间内)。δ ⊥m，向量 $\vec{A}$ 在点 p 的协变微分 $D\vec{A}$ 为其普通微分 $d\vec{A}$ 在点 p 切空间内投影。

有了协变微分的几何解释，我们再来理解协变微分的物理意义。要理解协变微分的物理意义首先来看一下普通微分 $d\vec{A}$ 的物理意义。从图 1-19 中可以看出若 $d\vec{A}=0$，则表明场流形是平直的，或者处于感知协变的状态下，但这种感知协变对于观测者是完全不自觉和无知觉的。而若 $D\vec{A}=0$,说明被描述的场流形对比我们所认为的“平直”比照系是非平直的，但可以重新理解我们所描述的场流形：认为描述的场流形本身就是“平直”的,但和比照系之间存在差异。这个差异项就是(1-101)式中 $\Gamma^{i}_{jk}A^{j}du^{k}\vec{E}_{i}$。当然对于被描述的场流形虽然我们认为是“平直”的，但这种理解是建立在和比照系存在差异的基础之上的，而非无知觉的。另外，我们也可以这样认为：虽然被描述的场流形相对于比照系是弯曲的，但我们可以引入一个修正项(或更确切地说为抵消项)使得弯曲场流形被“矫正”为“平直”流形。对于我们所生存于其中的实际的物理世界来说，理想的直尺就是光线，当我们身边的光线弯曲时，我们的意识也随之弯曲。然而存在固定参照系时，场流形的形变所引起的力场就表现出来，于是修正项有了很明确的物理意义，该项 $\Gamma^{i}_{jk}A^{j}du^{k}\vec{E}_{i}$ 就对应于场流形的形变所引起的力场。对于地球引力场来说，由质子、中子、电子极化场所构成的地球体和地面以上的场流形是相对独立的两类场流形，因而站在地面这个固定参照系时，我们能够感知到引力的存在。而引力的本质就是由于空间场流形形变造成的。

对于如图 1-18 所示在平面上有阱的情况我们只要将联络系数换成 $g\cdot A$ 即可得如下协变微分的关系式。

二秩张量 $C_{\beta\delta}$ 的协变导数可由下述要求得到，即对于任意的 A^{β} 和 B^{δ},$C_{\beta\delta}\ A^{\beta}\ B^{\delta}$ 在平行位移下均保持不变。令 $\delta(C_{\beta\delta}\ A^{\beta}\ B^{\delta})$等于零，得 $\delta\ C_{\beta\delta}$,从而协变导数可写为

$$C_{\beta\delta;\rho}=\frac{\partial C_{\beta\delta}}{\partial x^{\rho}}-\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\rho}C_{\delta\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\rho}C_{\beta\alpha} \tag{1-102}$$

类似地，

$$C^{\beta\delta}{}_{;\rho}=\frac{\partial C^{\beta\delta}}{\partial x^{\rho}}+\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\rho}C^{\alpha\delta}+\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\rho}C^{\beta\alpha} \tag{1-103}$$

$$C^{\beta}{}_{\delta;\rho}=\frac{\partial C^{\beta}{}_{\delta}}{\partial x^{\rho}}+\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\rho}C^{\alpha}{}_{\delta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\rho}C^{\beta}{}_{\alpha} \tag{1-104}$$

现考虑度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的协变导数，它也是张量，在短程线坐标系中，该张量的所有分量必然为零。因而得出，在所有其他坐标系中

$$g_{\mu\nu;\sigma}=0 \tag{1-105}$$

这里要提出注意的是：短程线坐标系是感知协变的坐标系(对于这种形变场流形的形变我们是清楚知道的)，而其他坐标系如果也是浸没于短程线坐标系，则上式在所有其他坐标系中成立。但如果“其他坐标系”是浸没于“理想平直”坐标系中，协变导数就退化为普通导数，即 $g_{\mu\nu,\sigma}=0$。可见协变导数是比普通导数意义更广的导数。所以这里的“其他坐标系”是浸没于短程线坐标系中的。

第七节　曲率张量

本章第三节协变流形中曾提到过空间弯的场流形本质是由场应变所造成的，并非真正义意上的场流形弯曲。我们知道量子场的任何形式的应变都会造成背景时空流形的微小形变，背景时空流形形变的大小严格正比于量子场应变的强弱。背景时空流形形变造成场流形“硬化”，换而言之，场流形的传播性能降低。场流形的传播性能降低导致了时钟变慢，也导致了空间弯曲。在场流形论中，空间弯曲的本质并非真的存在背景场流形弯曲，而是由于真空硬化程度不同造成的。光子(以及其他形式的量子场)传播速度的非均匀性会使光(以及其他形式的量子场)的传播路径发生弯曲，这和光线由空气进入凸透镜会发生折射的道理是一致的。场流形硬化的非均匀性本质上就是背景流形的应变大小。而背景流形的应变可以理解为时空弯曲。

在弯曲空间场流形中，沿闭合路线的平移一般说来并不给出原来的矢量。现在我们来算一矢量沿无穷小闭合路线平行位移时其分量的变化，而这一闭合路线是由双参数曲线族

$$x^{\alpha}=f^{\alpha}(u,v) \tag{1-106}$$

中的四条曲线确定的。这里考虑的路线是图 1-20 中包围画有斜线部分的四条边，其边长当v为常数时等于Δu，当 u 为常数时等于Δv。n^{μ}在整个闭合路线中的变化为

$$\delta n^{\mu}=-\oint\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}n^{\alpha}dx^{\beta} \tag{1-107}$$

考虑到“平行四边形”的对边所产生的贡献的代数和，并且保留Δu和Δv的一次项，得

$$\delta n^{\mu}=\frac{\partial}{\partial v}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}n^{\alpha})\Delta v\frac{\partial x^{\beta}}{\partial u}\Delta u-\frac{\partial}{\partial u}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}n^{\alpha})\Delta u\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}\Delta v \tag{1-108}$$

完成上式的运算，并利用表示n^{μ}在平行位移下的变化的公式，则结果可写成如下形式：

$$\delta n^{\mu}=-\left[\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\right]\times n^{\alpha}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial u}\Delta u\Delta v \tag{1-109}$$

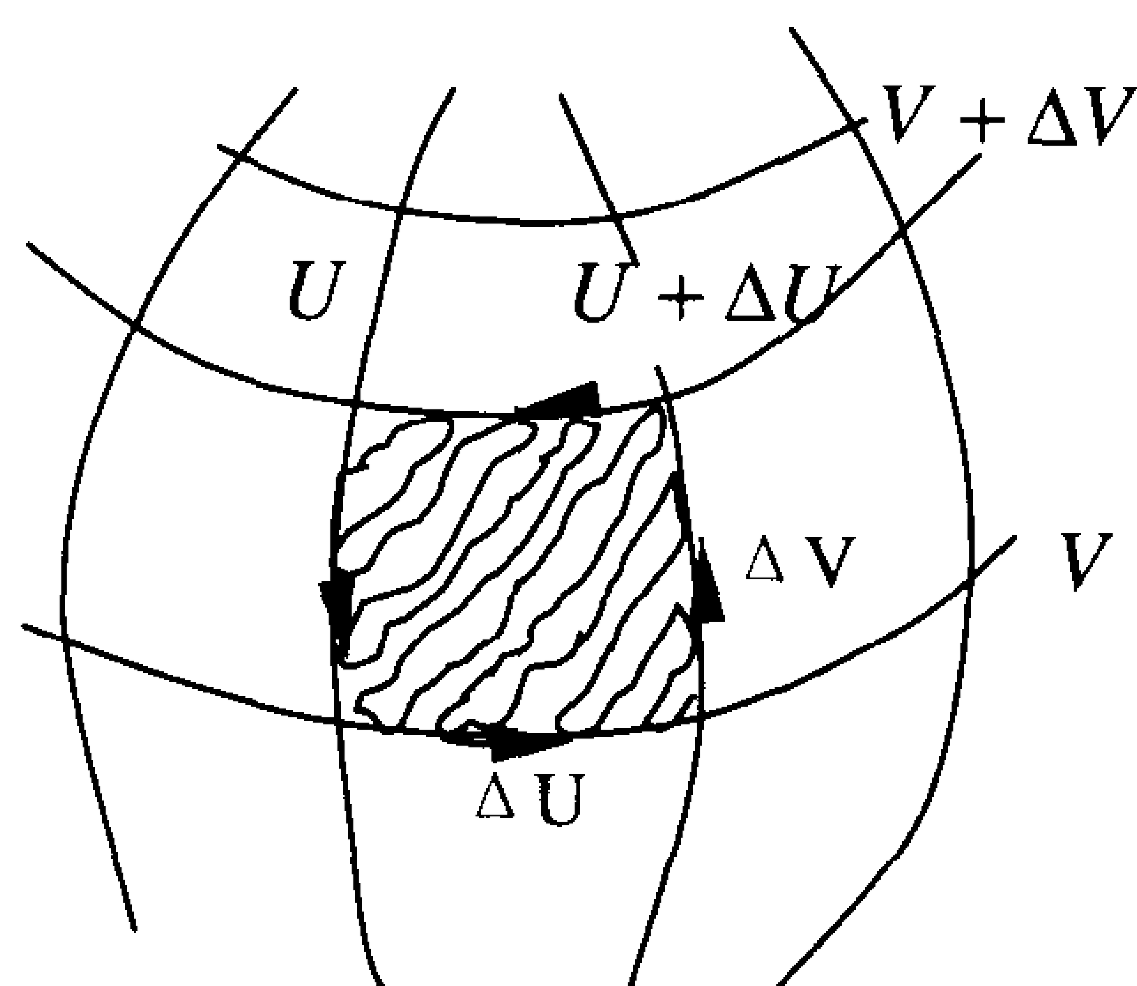


图 1-20　曲率张量的几何意义

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{\delta n^{\mu}}{\Delta v\Delta u}=-\left[\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma}-\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\right]\times n^{\alpha}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial u} \tag{1-110}$$

式(1-110) 的左端是矢量。因u和v都是参数，故$\partial x^{\beta}/\partial u$和$\partial x^{\gamma}/\partial v$也是矢量。因此，由下式

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} \tag{1-111}$$

定义的量$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$是张量，叫做黎曼－克里斯托菲张量，或简称为曲率张量。对于一无穷小闭合路线，则有

$$\delta n^{\mu} = -R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} n^{\alpha} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial u}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v} du dv \tag{1-112a}$$

又因$\delta(n_{\mu}n^{\mu})$在平行位移下化为零，故有

$$\delta n_{\mu} = R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} n_{\alpha} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial u}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v} du dv \tag{1-112b}$$

由式(1-112) 得，对于任意的有限闭合路线(需沿此曲线对u和v进行积分)，$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$为零保证任意矢量在平行位移下的不变性。

对于一给定区域中的洛伦兹度规，因$g_{\mu\nu}$为常数，曲率张量化为零。对这样的空间进行坐标变换，因$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$的张量特性，其分量经变换后仍然为零。由此得出，空间为平坦的必要条件是$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$为零。另一方面，如果$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$处处化为零，那么洛伦兹度规可以通过一组(闵可夫斯基)轴的平行扩展而产生。因这种操作是单值的，与路线无关。于是，任意矢量的诸分量在平行位移下处处化为零。度规所有一阶导数也将处处化为零。

由于出发点的度规为洛伦兹度规，显然任何地方的度规均为洛伦兹度规。由此得出：空间场流形为平坦的充分必要条件是$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$的所有分量处处为零。

表达式(1-111) 告诉我们，$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$关于$\beta$和$\gamma$是反对称的。张量$R_{\delta\alpha\beta\gamma}$由下式给出：

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\delta}R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\beta}}\right) + g_{\mu\nu}(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\delta\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\nu}{}_{\delta\beta}) \tag{1-113}$$

由式(1-113) 可看出

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\gamma\beta} = R_{\beta\gamma\alpha\delta} \tag{1-114}$$

由(1-113) 和(1-114) 式可以验证

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} = 0 \tag{1-115a}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \tag{1-115b}$$

第八节　比安基恒等式

在某点上取短程线坐标系，则该点的克里斯斯托菲符号化为零，且$R^{\mu}{}_{\delta\beta\gamma}$的协变导数变为

$$R^{\mu}{}_{\delta\beta\gamma;\nu} = \frac{\partial^2 \Gamma^{\mu}{}_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 \Gamma^{\mu}{}_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\nu}} \tag{1-116}$$

于是由(1-116)式得

$$R^{\mu}{}_{\delta\beta\gamma;\nu}+R^{\mu}{}_{\delta\nu\beta;\gamma}+R^{\mu}{}_{\delta\gamma\nu;\beta}=0 \tag{1-117}$$

关系式(1-117) 在特定参照系中得到的结果，因左端是张量，所以在其他一切参照系中均为零。这个关系式称为比安基(Bianchi) 恒等式。

对二秩或高秩的混合张量的一个上标和一个下标求和，得到一比原来张量低二秩的张量。这种运算称为降秩(contraction)。对 $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$ 降秩而构成的张量 $R_{\mu\nu}$ 称为里奇(Ricci)张量。

$$R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha} \tag{1-118}$$

可以验证奇张量具有对称性，即 $R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu}$。对 $R_{\mu\nu}$ 降秩而构成的标量

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=R \tag{1-119}$$

称为曲率标量。

用比安基恒等式与 $g^{\delta\beta}\delta_{\mu}{}^{\gamma}$ 内乘:

$$g^{\delta\beta}\left(R^{\gamma}{}_{\delta\beta\gamma;\nu}+R^{\gamma}{}_{\delta\nu\beta;\gamma}+R^{\gamma}{}_{\delta\gamma\nu;\beta}\right)=0$$

由 $g^{\delta\beta}$ 的协变导数为零，另外 $R^{\nu}{}_{\delta\beta\gamma}=-R^{\nu}{}_{\delta\gamma\beta}$，上式可写为

$$\left(R^{\nu}_{\gamma}-\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\gamma}R\right)_{;\nu}=G^{\nu}_{\gamma;\nu}=0 \tag{1-120}$$

张量 $G^{\nu}_{\gamma}=R^{\nu}_{\gamma}-\frac{1}{2}\delta^{\nu}R$ 称为爱因斯坦张量。可见爱因斯坦张量的协变导数为零。

第九节　短程线

我们来考虑这样的问题：由“每一线元均为前一线元平行位移的结果”这一要求所定义的曲线方程是一个什么样的方程？任一曲线方程均为单参数点族

$$x^{\alpha}=f^{\alpha}(s).$$

切矢量为 dx^{α}/ds，并且由平行位移而得的新切矢量为

$$T'^{\rho}=\frac{dx^{\rho}}{ds}-\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}dx^{\beta} \tag{1-121}$$

新切矢量 T'^{ρ} 还可由下式给出:

$$T'^{\rho}=\frac{dx^{\rho}}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\frac{dx^{\rho}}{ds}\right)ds \tag{1-122}$$

令式(1-121) 和(1-122) 相等，则得曲线方程

$$\frac{d^{2}x^{\rho}}{ds^{2}}+\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}=0 \tag{1-123}$$

该曲线的每一线元均为前一线元平行位移的结果。

可以预料，式(1-123)代表具有极值长度的曲线就是所谓短程线方程。为了证明这一点，我们来寻求当积分

$$\int ds = \int \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} \tag{1-124}$$

取稳定值时必然被满足的关系式。引入参数k，(1-124)式为

$$\int ds = \int \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dk}\frac{dx^{\nu}}{dk}}dk \tag{1-125}$$

令

$$L^2 = -g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dk}\frac{dx^{\nu}}{dk} \tag{1-126}$$

式(1-124) 取稳定值的条件变为

$$\delta\int Ldk = 0 \tag{1-127}$$

在短程线上，k 可以选为长度 s。

$$\delta\int Lds = \int\left[\frac{\partial L}{\partial x^{l}}\delta x^{l} + \frac{\partial L}{\partial(\frac{dx^{l}}{ds})}\delta(\frac{dx^{l}}{ds})\right]ds \tag{1-128}$$

其中第一项为零对积分没有贡献，因为变分在两端点上为零，于是(1-128)的欧勒—拉格朗日(Euler—Lagrange) 方程为

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial(dx^{l}/ds)} - \frac{\partial L}{\partial x^{l}} = 0 \tag{1-129}$$

利用式(1-126) 得

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial(dx^{k}/ds)} = -\left[\frac{dg_{k\nu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} + g_{k\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^{k}} = -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{k}}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}/2$$

从而式(1-129) 变为

$$g_{k\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2} - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x^{\mu}}\right]\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}$$

$$= g_{k\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{k\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{k}}\right]\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \tag{1-130}$$

将式(1-130) 乘以 $g^{k\alpha}$ 并求和，则得到短程线方程

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \tag{1-131}$$

式(1-123) 和(1-131) 完全一致。由前面 $x^{\alpha} = f^{\alpha}(s)$ 知 s 为该曲线的参数，而$\{x^{\alpha}\}$是任意坐标系，也可写成

$$\frac{dU^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = 0$$

上式采用另一种协变导数标记则可写为：$\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0$

$\nabla_{\vec{U}}$ 为沿$\vec{U}$ 的协变导数。$\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0 \Leftrightarrow \vec{U}$ 沿测地线 L 平行移动。

第十节　爱因斯坦引力场方程

在前面我们得知空间场流形相对于某固定参考系的形变会产生一个力场，力场的大小正比于空间场流形的相对形变量，具体表现为场流形曲率正比于空间力场，即$R \propto F$。对于组成我们这个可感知的物质世界的物质来说，物质的存在会对周围的场流形产生一个极小的影响，造成周围场流形的微小应变。场流形的应变表现为时空弯曲。在了解了以后的章节后，我们将会知道我们的物质世界是由无数的基本粒子所组成，而基本粒子就是三维极化场流形。极化场内禀空间以内的场流形就是我们所熟知的静态弱力场流形，是形变量很大的场流形，但这种大的应变ε被封闭在内禀空间以内。但这种应变对背景场流形会产生一个小的影响，使得背景流形应变$\varepsilon' \neq 0$。背景流形应变的大小严格正比于量子场应变的大小，即

$$\varepsilon \equiv k\varepsilon'$$

量子场的应变量就是量子场的能量，于是自然有这样的结论：量子场的能量大小直接决定了量子场背景流形时空的弯曲程度。极化场对内禀空间以外的场流形所造成的影响极小，这种影响小到当只考虑微观场流形时可以完全忽略。如下图 1-21 所示。

场流形的形变越小，则力场就越弱。换个角度极弱的力场说明场流形的形变曲率极小，极小的曲率就说明形变场流形弯曲的半径为极大，于是这种力场存在的区域就极大。换而言之，这种力场为长程力场。从场应变的角度来看，背景流形是由应变非零的基本单元场流形“粘合”起来便构成了整体形变场流形Ω，即协变流形，由于是由基本单元场流形紧密地无间隙地构成的整体场流形。作为整体场流形则某点的场应变会对整体都产生影响，协变流形存在于整个宇宙，所以这种应变力场会延伸至无穷远。协变流形弱应变力场所表现出来的这种极弱的长程力场就是我们所熟知的引力场。大量的极化场通过非引力场(如电磁相互作用）作用而构成可见的物体，当物体足够大时，大量极化场的引力叠加之后，就有了可观测的万有引力。

这里我们还要说明的是场流形理论中不存在负质量，并且也不存在负引力。正物质和反物质都表现出相同的惯性质量效应，无论是同类物质还是正反物质之间总表现为相互吸引而不存在排斥，换而言之不存在负引力场。我们这里先接受这一结论，至于为什么如此，本书 4.7 质量本质一节中有具体的说明。

我们用度规张量来描述协变场流形时空。场流时空弯曲所表现出的力场和加速度需要采用黎曼度规。一个非均的引力场，在每一个小区域内，同一个适当的加速系是等效的。因此还可望用黎曼度规来描述引力场。形变场流形空间的线元的平方由下式给出：

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1-132}$$

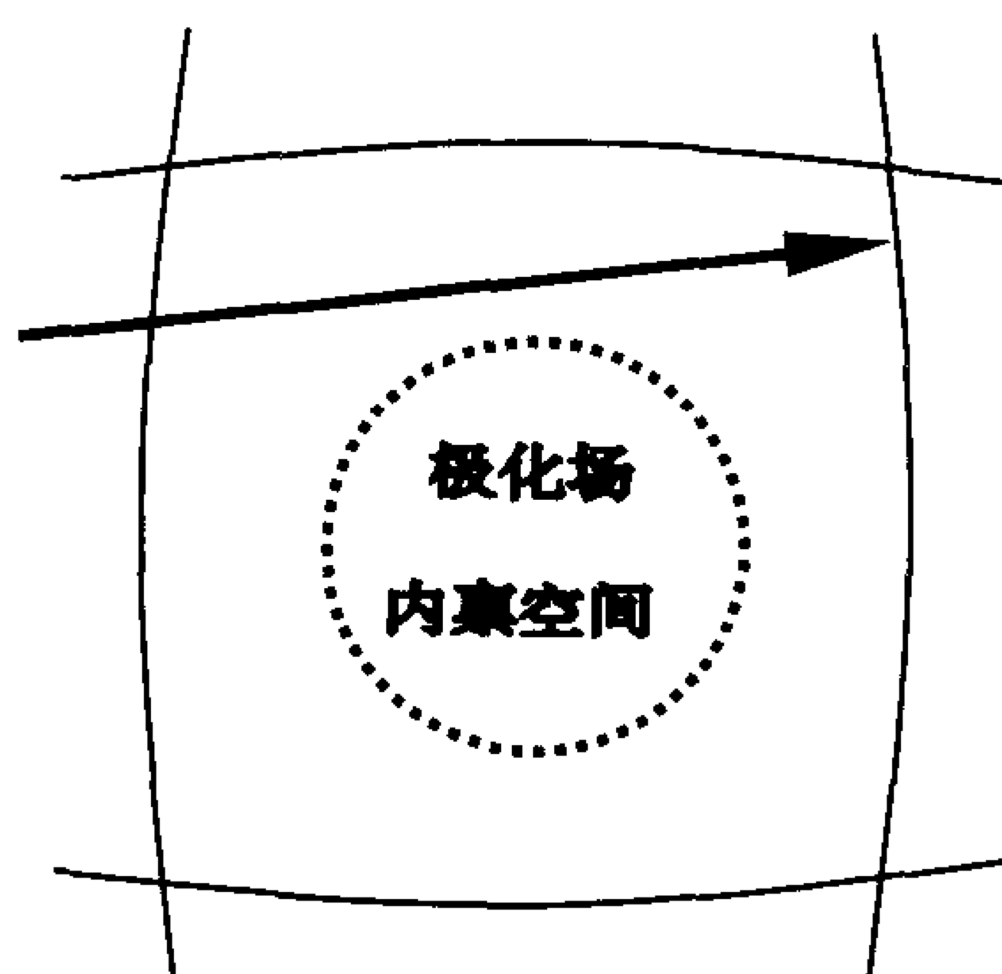


图 1-21　单极化场的引力效应

我们把度规张量$g_{\mu\nu}$与引力场等同起来。这是场流形的自然结果，在广义相对论中是从等效原理推出的等同性。现在的任务是列出将$g_{\mu\nu}$同物质的能量分布联系起来的微分方程。我们的出发点是牛顿的引力定律，它用如下引力势φ的泊松(Poisson) 方程描述：

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho_M \tag{1-133}$$

这里G为引力常数，ρ_M为单位体积的质量。

至少可将式(1-133) 的左端修改成洛伦兹不变式，即将其写为

$$\Box\varphi = 4\pi G\rho_M \tag{1-134}$$

式(1-134) 类似于电动力学中的四维势方程组。在场流形中，电场为纤维场(在第五章第二节中谈到)。对于某个电荷场纤的数量来说是固定不变的，因总电荷不变，故电荷密度是四维矢量的一个分量。但质量(本质是相对场应变，随参照系不同而不同)密度ρ_M并非不变量，因而式(1-134) 的右端不是四维矢量的分量，而是在狭义相对论中已熟知的二秩应力一能量张量的分量。

对于非相对论性力学中的流体，质量守恒可表示为连续方程

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} + c\frac{\partial\rho_M}{\partial x^0} = 0 \tag{1-135}$$

这里v^i是速度，对i的求和包括三个空间坐标。上式的狭义相对论推广为

$$\frac{\partial T_\mu{}^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \tag{1-136}$$

这里$T_\mu{}^\nu$是应力一能量张量。或记为$T_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0$。

在狭义相对论中的场论中，可由拉格朗日(Lagrange) 密度 L 获得$T_{\mu\nu}$，其中 L 被假定为场变量q^α及其一阶导数$q^\alpha{}_{,\beta}$的函数，即 L=(q^α ,$q^\alpha{}_{,\beta}$)。作用量函数是L/c的四维体积分，而稳定作用量原理断言：当场变量的变分在边界上为零时，有

$$\delta\int Ld^4x = 0 \tag{1-137}$$

这里符号 δ 取通常的意义，并假定场变量q^α和$q^\alpha{}_{,\beta}$是某参数的函数。若参数为k，则$\delta = dk(\partial/\partial k)$,并且，在求微分$\partial/\partial k$时假定$x^\mu$为常数。因此，对坐标微分和对$k$微分的次序是可交换的。式(1-137) 可表示为

$$\begin{aligned}0 = \delta\int Ld^4x &= \int(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}}\delta q^\alpha{}_{,\gamma})d^4x \\ &= \int(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}})\delta q^\alpha d^4x + \int\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\beta}}\delta q^\alpha)d^4x\end{aligned} \tag{1-138}$$

式(1-138) 右端的最后一项又可写成面积分的形式，因假定δq^α在积分域的边界上为零，故此面积分也为零。由于式(1-138) 对于任意的变分均成立，于是推出场方程为

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \tag{1-139}$$

将式(1-139) 乘以$q^\alpha{}_{,\beta}$,并注意到

$$\frac{\partial L}{\partial x^\beta} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\rho}}\frac{\partial q^\alpha{}_{,\rho}}{\partial x^\beta} \quad ,$$

以及$q^\alpha{}_{,\gamma,\beta} = q^\alpha{}_{,\beta,\gamma}$。则结果经整理后为

$$\left[\delta_\beta{}^\gamma L - q^\alpha{}_{,\beta}\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}}\right]_{,\gamma} = 0 \tag{1-140}$$

由式(1-140) 和(1-136) 得出

$$T_\beta{}^\gamma = \delta_\beta{}^\gamma L - q^\alpha{}_{,\beta}\frac{\partial L}{\partial q^\alpha{}_{,\gamma}} \tag{1-141}$$

我们从经典力学知道$-T_0{}^0$即能量密度，因为$q^\alpha{}_{,0}$是同速度相对应的。对式(1-140) 和(1-141) 的研究表明，定义(1-141) 不能维一地确定$T_\beta{}^\gamma$。可以将任意的量$\Phi_\beta{}^{\gamma\alpha}{}_{,\alpha}$加到$T_\beta{}^\gamma$上，只要$\Phi_\beta{}^{\gamma\alpha}{}_{,\alpha}$关于$\gamma$和$\alpha$是反对称的。习惯上这样来选取函数$\Phi$，以使得出的张量$T_{\beta\gamma}$(二指标均已升高或降低)是对称的。这样做的理由是希望由

$$M_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta}x_\gamma - T_{\alpha\gamma}x_\beta \tag{1-142}$$

定义的角动量密度满足守恒定律

$$M_{\alpha\beta\gamma}{}^{,\alpha} = 0 \tag{1-143}$$

完成式(1-143) 左端指明的微分，即知式(1-143) 确实为对称的$T_{\alpha\beta}$所满足。

对于流体，$T_{\mu\nu}$是借助四维速度U_μ 来给定的，即

$$T_{\mu\nu} = (p+E)U_\mu U_\nu + \delta_{\mu\nu}p \tag{1-144}$$

这里p是压力，E是在各点的局部物质静止系中算得的总(质量)能量密度。方程(1-144) 是三维应力张量T_{ij}的四维推广，由T_{ij}确定的作用在面元ds^i上的力dF_i为

$$dF_i = T_{ij}ds^j. \tag{1-145}$$

式(1-135) 只给出了质量的守恒，而式(1-136)则既包括总能量的守恒又包括动量的守恒。动量与能量由p_α的空间分量和时间分量确定：

$$p_i = \int T_i{}^0 dx^0 dx^2 dx^3 \quad , \qquad p_0 = \int T_0{}^0 dx^0 dx^2 dx^3$$

在洛伦兹变换下，p_α的变换有如一个四维矢量。

现在我们回到式(1-134)上来，并注意式(1-134) 的右端恒等于$T_{\mu\nu}$的零一零分量。这暗示我们，引力场方程可表达为这样的等式：一个二秩张量组合等于其他场的应力-能量张量。张量场方程的左端在某种近似程度内应当化为达朗贝尔(D'Alembert) 算符。若要求方程左端的张量由$g_{\mu\nu}$构成的，且不包含$g_{\mu\nu}$的高于二阶的导数，则待定张量的可能数目还可以减少。对于弱场，这个张量应化为达朗贝尔量。为了保证这一性质，又为了简便地获得量纲的一致性，有理由要求这些方程至少对于$g_{\mu\nu}$的二阶导数是线性的。

因此，我们假定某给定张量不包含$g_{\mu\nu}$的高于二阶的导数，并且对于$g_{\mu\nu}$的二阶导数是线性的，引进短程线坐标系，以使克里斯托菲符号化为零。由式(1-113) 可知，$g_{\mu\nu}$的二阶导数在这些坐标系中总可以写为曲率张量的线性函数。如果需要一个二秩张量，那么它的最一般的形式应为

$$C_1R_{\mu\nu} + C_2g_{\mu\nu}R + C_3g_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} \tag{1-146}$$

C_1, C_2,及C_3是常数。式(1-146) 的前两项是曲率张量分量的线性组合。由于式(1-146)为张量方程，故它在任意坐标系中均成立。广义协变性、二秩张量与$g_{\mu\nu}$的二阶导数成线性关系，以及无更高阶的导数存在等要求，给出了形如式(1-146) 的表达式。

设未知定律取如下形式:

$$B_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{1-147}$$

即二对称张量之间的关系式。假定已求得一个解，它把$g_{\mu\nu}$确定为坐标的函数。现在就可以引进四个函数

$$x'^{\mu} = F^{\mu}(x) \tag{1-148}$$

来进行坐标变换。对这些函数可作这样的选择，使得在某初始时刻或在某类空曲面上处处有$g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$,并且$g_{\mu\nu}$的一阶导数与$g'_{\mu\nu}$的一阶导数也处处相等。由于式(1-147) 的协变性，变换后的场方程与原方程具有完全相同的形式。又因这些方程不含有高于二阶的导数，故$g_{\mu\nu}$和$g'_{\mu\nu}$处处相等。但这种情况同式

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} g_{\alpha\beta} \tag{1-149}$$

是矛盾的。

因此，希尔伯特得出结论：像式(1-147) 这样的四维协变表达式，不应当是十个独立的方程，而应当满足四个恒等式，因而这组表达式仅含有六个独立的方程。在这种情况下，解将包含四个任意的函数；仅当坐标系以某种非协变的方式被挑选出时，这些函数才成为唯一确定的。寻求为式(1-147) 所满足的四个恒等式的线索，来自于下述事实，即对于洛伦兹度规，构成式(1-147) 右端的应力—能量张量满足守恒定律

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{1-150}$$

对于广义协变理论而言，式(1-150) 的逻辑推广为

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{1-151}$$

曾经证明[方程(1-120)], 比安基恒等式给出

$$\left(R_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu} R\right)_{;\nu} = 0 \tag{1-152}$$

若将式(1-146) 中的常数作适当选择，则这些恒等式是适用的。由这些论证推得，场方程必取如下形式:

$$R_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu} R - \lambda\delta_{\mu}{}^{\nu} = K T_{\mu}{}^{\nu} \tag{1-153}$$

这里λ和K是常数。经验事实与逻辑简洁性都指出可令λ等于零。爱因斯坦的原始表述还包括了下面的陈述：粒子在引力场中的运动是用牛顿定律的协变推广来描述的，这一推广给出了短程线方程

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = 0 \tag{1-154}$$

后来证明，运动方程实际上已经包含在场方程(1-153) 中，并不需要另作假设。按照式(1-154)，作用在静止物体单位质量上的力由三个分量$-c^2\Gamma^i_{00}$给出。在弱场近似下，$g^{i\alpha}$非常接近于洛伦兹度规的值，因而对于不依赖于时间的度规,

$$F^i = -c^2\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2}c^2\nabla_i g_{00}$$

同其他场相类比，把$\frac{1}{2}c^2 g_{\mu\nu}$看作引力势是很自然的。对于弱场，式(1-153) 应化为泊松方程，对式(1-133) 。将式(1-154)的常数K选作$8\pi G/c^4$，即可做到这一点，其中G为引力常数。$G = 6.667\times10^{-8}cm^3\cdot g^{-2}\cdot s^{-2}$。于是场方程变为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1-155}$$

上式左边是场流形弯曲对应于右边质量观测效应。

第十一节　引力波的不可测与动态感知协变

引力辐射问题一直是广义相对论的中心问题之一。迄今为止还没有观察到引力波。21世纪的今天，相对论的问题的研究日臻完善，许多理论问题已获解决。现在许多物理学家得以作出结论：广义相对论确实预言了引力波的存在。场流形理论也同样认为存在引力波，和广义相对论不同的是：场流形理论中引力波是不可测的。

爱因斯坦于1916年研究了场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

的弱场解。此解是通过假定

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1-156}$$

而得到的。在式(1-156)中，$\delta_{\mu\nu}$为洛伦兹度规，而$h_{\mu\nu}$为一级量。$h_\mu{}^\lambda$和h被定义为

$$h_\mu{}^\lambda = \delta^{\lambda\alpha}h_{\mu\alpha}\ , \tag{1-157}$$

$$h = h_\alpha{}^\alpha = \delta^{\sigma\lambda}h_{\sigma\lambda} \tag{1-158}$$

里奇张量可借助克里斯托菲符号写为

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\beta{}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\beta{}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\beta{}_{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} \tag{1-159}$$

利用式(1-156) 、(1-157) 及(1-158)，我们能够将精确到一级量的$R_{\mu\nu}$写为

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\delta^{\sigma\lambda}h_{\mu\nu,\sigma\lambda} - \frac{1}{2}(h_{,\mu\nu} - h_\mu{}^\beta{}_{,\nu\beta} - h_\nu{}^\beta{}_{,\mu\beta}) \tag{1-160}$$

式(1-160)的后三项可整理成如下形式：

$$h_{,\mu\nu} - h_\mu{}^\beta{}_{,\nu\beta} - h_\nu{}^\beta{}_{,\mu\beta} = \left(\frac{1}{2}\delta_\mu{}^\beta h - h_\mu{}^\beta\right)_{,\beta\nu} + \left(\frac{1}{2}\delta_\nu{}^\beta h - h_\nu{}^\beta\right)_{,\beta\mu} \tag{1-161}$$

通过坐标条件的选择，即令

$$\left(h_\mu{}^\beta - \frac{1}{2}\delta_\mu{}^\beta h\right)_{,\beta} = 0 \tag{1-162}$$

可将式(1-161) 化为零。

现将$R_{\mu\nu}$仅由式(1-162) 的第一项组成，从而场方程可写为

$$-\frac{1}{2}\delta^{\sigma\lambda}h_{\mu\nu,\sigma\lambda}+g_{\mu\nu}[\frac{1}{4}\delta^{\sigma\lambda}h,_{\sigma\lambda}]=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1-163}$$

运用式(1-163)时须加小心，因为右端的各个分量通常并不属于同一级近似。现在我们定义

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}=h_{\mu}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}h \tag{1-164}$$

于是坐标条件(1-162) 可写为

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{1-165}$$

升高式(1-163) 中的指标ν,并应用式(1-164)，得

$$\Box\varphi_{\mu}{}^{\nu}=-\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu}{}^{\nu} \tag{1-166}$$

式(1-166) 的解是我们在电动力学中所熟知的，即

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}(r,t)=\frac{4G}{c^4}\int\frac{(T_{\mu}{}^{\nu})_{推迟}d^3x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{1-167}$$

此处$|\vec{r}-\vec{r}'|$表示源点至场点的距离。前面曾指出，将牛顿引力定律中的∇^2换为$\Box$，便直接得出关系式(1-166)；守恒定律$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}=0$则给出式(1-165)。

现在我们来考虑使表达式(1-165) 满足的条件。假定我们施行一无穷小坐标变换

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\xi^{\alpha}(x) \tag{1-168}$$

精确到一级近似，上式可写为

$$x^{\alpha}=x'^{\alpha}-\xi^{\alpha}(x') \tag{1-169}$$

这样,变换后的度规张量由下式给出：

$$g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-g_{\alpha\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\mu}-g_{\beta\mu}\xi^{\beta}{}_{,\nu} \tag{1-170}$$

类似地，

$$h'_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\delta_{\alpha\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\mu}-\delta_{\beta\mu}\xi^{\beta}{}_{,\nu}, \tag{1-171}$$

$$\varphi'_{\mu}{}^{\alpha}=\delta^{\alpha\nu}[\varphi_{\mu\nu}-\delta_{\beta\nu}\xi^{\beta}{}_{,\mu}-\delta_{\beta\mu}\xi^{\beta}{}_{,\nu}+\delta_{\mu\nu}\xi^{\gamma}{}_{,\gamma}], \tag{1-172}$$

$$\varphi'_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}=\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}-\delta^{\rho\sigma}\xi_{\mu,\rho\sigma} \tag{1-173}$$

如果坐标条件(1-165)未被满足，则我们有

$$\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}\neq 0\ , \tag{1-174}$$

式(1-173) 表明，可以施行一无穷小坐标变换，使得

$$\varphi'_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}=0\ , \tag{1-175}$$

只要

$$\Box\xi_{\mu}=\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{1-176}$$

成立。

另一方面，若$\varphi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}=0$，则我们所施行的任意坐标变换均可使该条件保持成立，只要函数ξ_{μ}满足波动方程 $\Box\xi_{\mu}=0$ 。

我们回过来考虑式(1-166) 。在自由空间中，这些方程描述了由式

$$\varphi_{\mu}{}^{\nu}=0 \tag{1-177}$$

确定的波场$\varphi_{\mu}{}^{\nu}$。

由式(1-164) 知波场$\varphi_{\mu}{}^{\nu}=h_{\mu}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}h$，而$h_{\mu}{}^{\lambda}=\delta^{\lambda\alpha}h_{\mu\alpha}$，$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$，在这里$g_{\mu\nu}$所表述的就是形变真空场流形的度规，显然形变很小，力程就非常大，因而是表述大范围场流形的。$h_{\mu\nu}$则是平直度规$\delta_{\mu\nu}$和形变流形之间存在的微小差异，表述了大范围场流形形变的程度。因而波场$\varphi_{\mu}{}^{\nu}$也是大范围的场流形波动。和量子场流形截然不同的是量子波场流的形变是被严格限制在量子场的内禀区域中(以后的章节我们会详细谈到)，并且量子内禀空间的场流形形变量和引力场空间形变量相比要大出许多数量级。

对于引力波来说，引力波的场流形变的曲率半径比地球的半径要大得多，即 $R_{引}>>r_{地}$。地球以及所有的观测者、精密的引力波测量仪器都浸没于巨大的引力波场流之中，于是不可避免要发生感知协变。如图 1-22 所示，当引力波向地球传播过来时，背景场流形发生形变，地球本身也随背景场流形的形变而发生形变，根本不存在一个相对不变的参考系。所以我们的思维和仪器也随引力波一起波动，这种随时间不断变化的感知协变称为动态感知协变。

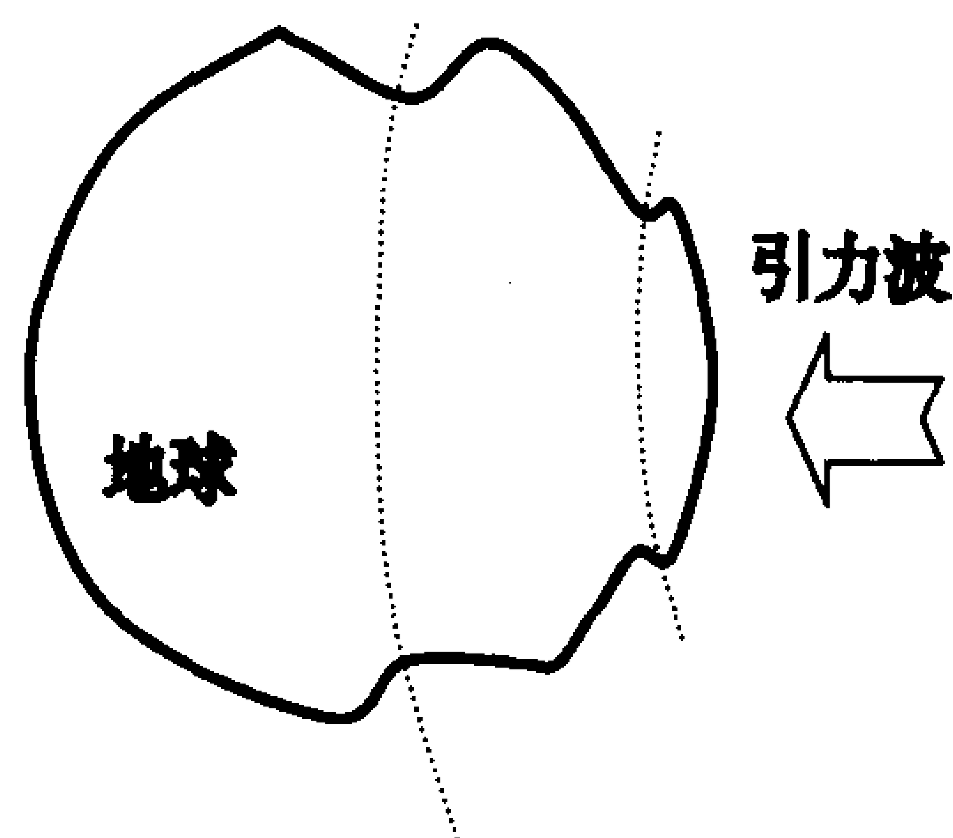


图 1-22　引力波示意图

现在我们来做一个假想的实验：当我们进入一个封闭的自由下落的箱子内，此时有引力场存在，换而言之存在弯曲的背景场流形。整个箱体沿短程线运动，在箱体内，我们处于失重状态。因为无引力存在，我们在箱体内我们不可避免地陷入了感知协变中，我们对背景场流形失去了判断力，我们会自以为我们处于平直流形中。我们进一步设想：如果引力场忽大忽小，不断变化，那么箱体和我们下落的加速度也会忽大忽小，而箱体内的我们将对背景流形的变化一无所知，我们仍然会自以为我们处于平直流形中。这便是动态感知协变。

今天，我们虽然能用数学描述引力波，但由于存在感知协变的困扰，上帝与人类开了一个天大的玩笑，无论我们用何种精密的仪器、何等精巧的构思以及何种艰苦的努力我们都无法直接测到引力波！

另外，我们还要说明的是：由于引力波是大范围场流形波动，因而根本不存在引力子的概念。引力子是局域场形变流形，而极弱的场流形形变是根本无法定域的。引力场之间的相互作用就是由于背景场流形弯曲而产生的力场之间的相互作用，并非两场源之间交换引力子。引力场的量子理论在场流形中是不存在的。

第二章 一维量子波流形

第一节 理想一维场流形

在前面一章中，我们对场流形有了一个整体上的大致理解，建立了协变流形的概念，并且知道用黎曼几何可以表述这种流形的形变所造成的时空弯曲效应，由前面的要点我们知道物理空间为三维场流形构成，加上时间维度构成四维时空，而时间维度的本质是什么呢？我们来建立时间的场流形概念。

一、 场流形的时间概念

在前面第一章第四节中，我们建立了经典时间概念，现在我们来考虑场流形的时间概念。在场流形中，两点之间的距离被一种实在的物质(场流形)的量所取代。

现在考虑我们进入场流形中的某一个区域内，显然要发生感知协变。我们打算放弃用我们所构造的尺子来测量两个点间的距离的这种方法，这种方法虽然能测出两个点间的距离，但不能真实反映两点间场质的量，所测到的是空间的量，而不是场质的量。空间是数学空间到场流形的映射而构成的物理空间。为了用某种更好的方法来测量两点间场质的量，于是我们找到了如下方法：

如图 1-14 所示，我们采用相互比较的办法来得到一种两点间场质相对的量，由于场质本身的内禀性质已超出我们的实验及认识所及的范围，得到两点间场质绝对的量是不可能的，因而通过比较而得到一种相对的量是一种最接近现实的方式。在图 1-14 中，我们想知道 C 、 B 两物体所经历的场质的量有多少，我们便以 A 物体为标准进行比较，这样便得到了结果。A 、B 、C 由 a 点出发向 b 点运动，当运动至如图 1-14 所示的瞬间: a 至 C 场质的量是 A 的一半，比 A 少；a 到 B 场质的量是 A 的 4/3，比 A 多。这个比较值就是 a 点至 B 、 C 的场质的量，是以 A 为标准比较而得到的量。当然，要得到这种相对的量要有相对运动才能比较出来，因而所比较出的场质的量是动态的。由于运动的性质，这种比较的量随物体的运动所经历的场质的量在不断增加，而无法停息。这种特性是由测试方法决定的。因而无法改变其累加的特性，除非还有更好的方式。由这种方法所测出是两点间动态场流形的量，两点间由运动轨迹连起来。在轨迹内的场流形的量就是运动物体所经历的场质的量。要特别注意的是这个量是背景场流形上的量。A 的均匀运动给出了一个测量场流形量的运动基准，这个基准便是时钟，显然作直线均匀运动和作均匀转动都能给出动态基准，后者更为方便，但本质都是一样的。

从上述分析来看，时间的本质就是一个动态的测量场质的量的基准。从这种意义上来看，我们认为时间的本质就是所经历的场流形的量。这就是时间的场流形概念。对于物理时空我们有了新的理解：

x, y, z 对应的空间量，t 对应场质的量，时间和空间只是场流形的不同表现方式，时空是场流形本质的两种表述形式。显然时空不可能相互独立存在。只有用时空同时表述场

流形，场流形才能被准确表述。以上所定义的时间是以背景流形为基础的，所以称背景时间，也就是我们现在所指的时间。

二、一维量子波的形成

现在我们来了解微观的场应变，即一个点及其邻域的情况。我们知道物理时空是以三维场流形为物质基础的，而在三维场流形中建立量子场的概念有些重要的物理概念不容易清晰地理解。为了使问题简化，我们来构造一种理想的一维场流形，然后来分析理想一维场流形的情况，就使问题大为简化。之后，我再回到真实的三维场流形中建立更为完备的物理学概念。

设想，由处于平直状态的三维场流形的基本单元(构成场质并保持场三维特性的最小基本单元)沿直线排列并且没有任何弯曲和形变，称为理想一维场流形。对于弹性的一维场流形来说，可以产生横波，可以产生纵波，这里我们仅考虑纵波，不考虑一维场流形弯曲的情况。我们来考虑在这种理想一维场流形中的纵波，为了分析方便，我们取 8 份一维基本单元场流排成一行，如图 2-1 所示。

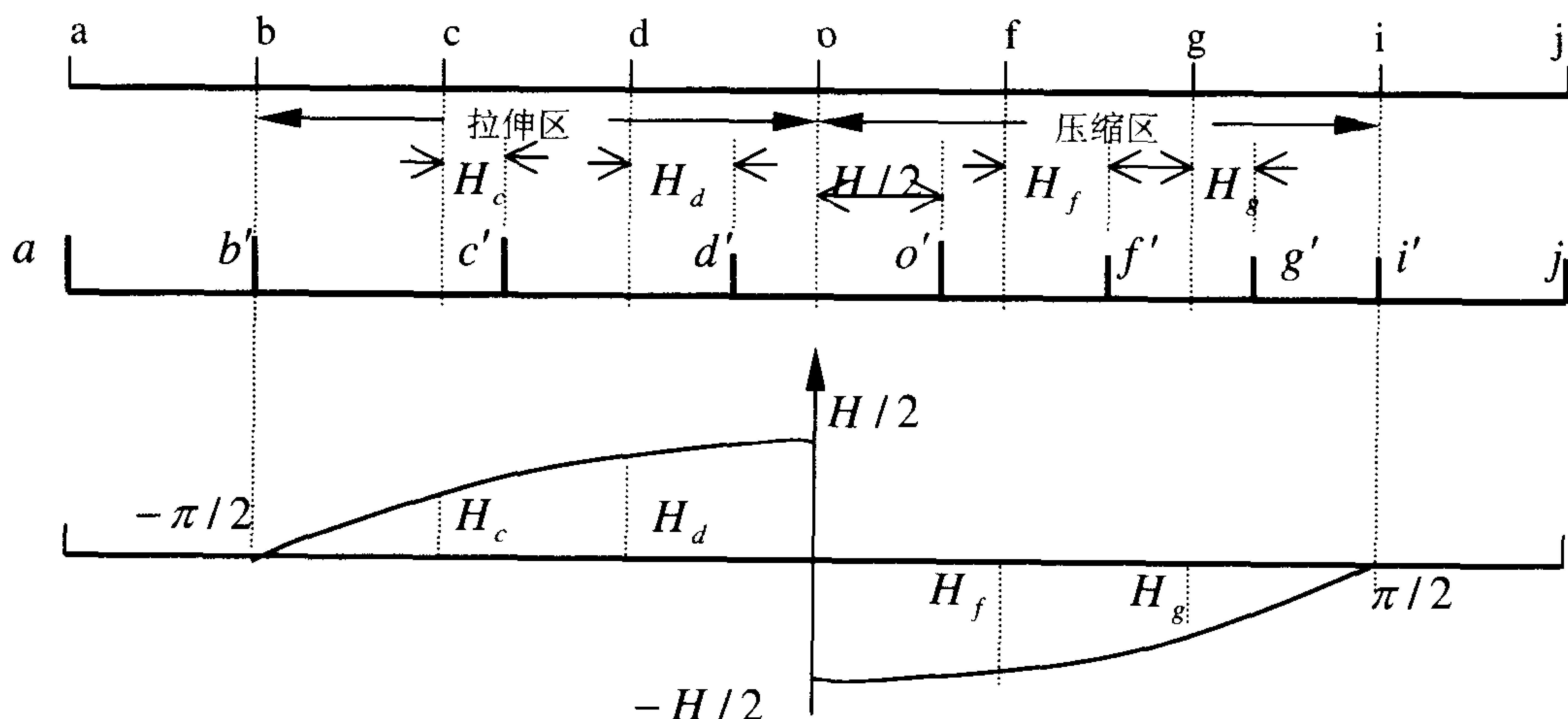


图 2-1 一维量子波内禀结构

在图 2-1 中，(a) 为理想的一维平直流形，我们在一维平直流形上作 a、b、c、d、o、f、g、i、j 这 9 个均匀的标记，现在我们来考虑 o 点的情况。

弹性流形中的一个最小单元的场质 o 点向前移动，就会压缩前面的场质而拉伸后面的场质，如图 2-1 所示。越靠进o'点的场质形变量就越大。在假设 II 中，我们知道场质存在着拉伸和压缩极限，我们定义o'点偏离 o 点的最大值为拉伸压缩极限值。

当o'点没有达到拉伸压缩极限时，就不会形成纵波，这种情况o'点仅会恢复自然状态，并把振动能还给施以场形变的场质体。因为不能形成波，所以o'点的形变不能独立存在。因而我们只考虑达到拉压极限而形成波的情况。

当达到压缩极限时，o 点就会压迫 f 点，f 点压迫 g 点…，oi 段变短，成为$o'\ j'$段。缩短的量为 H/2。

$$o'i' - oi = -H/2$$

这个值为点o'偏离 o 点的大值,为压缩极限值。显然由前面的假设知道,这个拉伸压缩极限值是场流形的固有特性值,为一个恒值。在达到压缩极限时也同样达到了拉伸极限值。

$$o'b' - ob = H/2$$

由b'至i'这一段，一维场流形就形成一个独立的纵波，在b'和i'以外的场流形仍然保持平直均匀，并没有受到o'点移动的影响，于是由拉压两区组成的波在一维场流形中传播，这是一种不同于经典波的孤立波，称一维量子波。

三、 波 速

一维量子波在一维场流形中传播的速度称波速，对于一维场流形来说，只要场流形场密度不变，则波的传播速度总是一致的，与波的波长、频率无关。场流形是弹性流形和经典弹性媒介质应该存在共性。在经典弹性媒介质中，纵波的传播速度与杨氏模量的平方根成正比，而与媒介质密度的平方根成反比。

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (2\text{-}1)$$

其中$\alpha = \dfrac{1}{E}$

α为弹性系数，E为杨氏模量，ρ媒介质密度。

如果用弹性媒介质的观点来解释光速，我们就会得出这种媒介的杨氏模量极大，而密度极小的结论，这种媒介质称为以太，而以太是根本不存在的。

在我们的统一场理论中，场流形是构成所有物质的最基本的物质形态。式（2-1）是由普通实验得出的结论，实验测试的媒介质是由分子构成。两种不同层次的物质形态是无法用同一种公式来表述的。如同用分子的规律不能解释更基本的原子的规律一样。只能由原子的性质来解释分子的性质。由经典弹性媒介质来解释光速所构造出来的以太和现代场流形是风马牛不相及，因而我们必须切底放弃经典媒介质的概念，时刻记住这里我们所谈论的是现代场流形，否则我们会走入以太的死胡同。

第二节　一维量子波的静态分析

现在，我们以量子波传播速度相同的速度建立一个参照系来研究一维量了波。这样的参照系相对于量子波是静止的，称为静止参照系。在静止参照系中，一维量子波的静态结构如图 2-1 所示。

我们把由中心点 o 到 i 段称为压缩区，记为$R_{压}$，把 ob 段称为拉伸区，记为$R_{拉}$，显然，$R_{压} = R_{拉} = R$，是一维量子波的半径。把拉伸区和压缩区的长度定义为波长Φ（为纵波波长）：Φ=2R 。

一、普郎克常数H的场流形概念

由场流形的基本假设Ⅱ，我们知道场流形存在拉伸极限和压缩极限，现在我们具体地看一下一维情况。在图 2-1 中，场流形的形变量对于压缩场流形来说场流形的极限变量为

$-H/2$，对于拉伸区极限形变量为$H/2$，总形变量就是拉伸区和压缩区场流形极限形变量绝对值的总和，即为H，这就是一维量子波场流形的总形变量。并把这个量称为一维量子波的普克量，记为H，为一常数，是场流性的基本性质。

对于量子波来说，我们要引入内禀时间概念，对于单个量子场来说形变区域的场流形的量被定义为内禀时间，而形变区域的大小称为内禀空间，内禀时间的概念是由背景时间概念引伸过来的，都是指场流形的量，但两者的意义是不同的，内禀时间已不再是我们所熟知的时间概念，是指内禀场流形的量。背景时间是动态的而内禀时间则是静态的，但两者存在很深刻的内在联系，这一点以后我们会看到。

一维量子波的场流形形变量就是时空形变量，对于一维场流形来说就是二维时空变量，即一维时间和一维空间，场流形作为一种物质包括它的体积(即空间)和它的数量(即时间)。时空是场流形的两种表达形式。所以也可以把普朗克量称为量子波的时空总形变量。

由前面我们知道时间和空间都是场流形同一本质的不同表现形式，空间和时间仅相差一个转换系数，我们把这个系数用c表示，即$x=ct$。时空的总形变量H就是场流形的总形变量。对于空间总形变量H_x和时间总形变量H_t本质就是场流形的总形变量，即

$$H \equiv H_x \equiv H_t \tag{2-2}$$

总形变量H就是弹性理论中的$2u_{\max}$，系数2表示拉伸区和压缩区形变位移之和。

$$H \equiv \left|\int_{-H_x/2}^{H_x/2} dH_x\right| = \left|\int_{-H_t/2}^{H_t/2} dH_t\right| = 2u_{\max} \tag{2-3}$$

上式中，由于H是一个正值，只需考虑绝对值。压缩区的最大形变量为$-H/2$，拉伸区的则为$H/2$。（2-3）式为一维普朗克的定义式，其中H_x为波长Φ内一维场流形的空间总形变量，H_t为t_Φ内一维场流形的时间总形变量，t_Φ为Φ内一维场流形的量，即内禀时间，更确切地说是一维场流形内禀时间。

二、 量子波的能量

因$H=H_x=H_t$，则有

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx = \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

我们定义量子波的能量函数

$$e(t) = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{2-4}$$

由（2-4）式我们知道量子波的能量函数是量子场场形变量随内禀时间的变化率，如果取这个变率在$0 \sim t_\Phi$区间的平均值

$$\bar{e}(t) = \frac{H}{t_\Phi} \tag{2-5}$$

这个值就是我们所熟知的量子波的能量值E。

三、量子波的动量

我们定义量子波的动量函数

$$p(t) = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{2-6}$$

由（2-6）式我们知道量子波的动量函数是量子场形变量随内禀空间的变化率，如果取这个变化率在 0~Φ 区间的平均值

$$\overline{p}(x) = \frac{H}{\Phi} \tag{2-7}$$

这便是我们所熟知的量子波的动量 p 。当 $p(x)$ 取平均值以后，由式(2-7)有

$$H = p\Phi \tag{2 -8a}$$

类似地有

$$H = et_{\Phi} \tag{2 -8b}$$

综合上述两式，我们有

$$H = p\Phi = et_{\Phi} \tag{2-8}$$

即 $H = px = Et$，这是我们非常熟悉的表达式。

$\overline{p}(x)$ 是 $p(x)$ 在 $0 \sim \Phi$ 区间的平均值，知道 $\overline{p}$ 并不能知到 $p(x)$，所以找出 $p(x)$ 是我们了解量子波场内禀结构的关健。H 为量子波场流形总形变量，于是可以把 p 更为简明地说成动量 p 是场流形总形变量的空间均分量，显然对于某个量子场来说这个量为常数，能量 e 则是场流形变量的时间(内禀场流形量)的均分量，内禀区间越小，则量子波的动量、能量就越大。

四、量子波的内禀结构函数、波函数及能量、动量算符

我们把函数 $H(x)$ 称为一维量子波的内禀结构函数。H_x 是场流形的空间最大形变量，H_t 则是场质(内禀时间)的最大形变量。我们把 H_x 称为一维普朗克空间量，H_t 为一维普克时间量，现在我们来看 H 的具体表达式，对于量子波内禀结构函数来说，我们不可能进入到量子波的内部，也无法找到比量子波更小的探针来探测，因而我们只能设法去构造量子波的内禀结构函数。由于场流形是弹性流形，应该和我们宏观世界的弹性物质存在相似性，也和弹性介质中的弹性波存在某些共性，因而如图 2-1 所示，场流形在自由状态时很容易形变，在接近 o' 点时，场流形变硬，再形变就困难，形变量变小。由弹性流形的性质和波的性质，只考虑绝对值，我们很容易想到用余弦函数来构造和表述。对于空间部分

$$H(x) = H \cos kx \tag{2-9a}$$

内禀时间和空间是场流形的两种表述方式，时空是严格成比例的，内禀时间部分

$$H(t) = H \cos k_0 t \tag{2-9b}$$

$$H(x,t) = H \cos kx = H \cos k_0 t \tag{2-10}$$

（2-10）式分别代入（2-4）得能量函数

$$e(t) = -Hk_0 \sin k_0 t = \frac{dH}{dt} \tag{2-11a}$$

动量函数

$$p(x) = -Hk\sin kx = \frac{dH}{dx} \tag{2-11b}$$

当分区域进行考虑时，由式(2-3)有

$$H = H\left[\int_{-\Phi/2}^{0} -k\sin kxdx + \int_{0}^{\Phi/2} -k\sin kxdx\right] \tag{2-12}$$

这里Φ就是我们所习惯的一维纵波的波长λ。要满足式（2-12），则

$$\mathbf{k}=\frac{\pi}{\lambda} \qquad k_0=\frac{\pi}{t_\lambda} \tag{2-13}$$

由式（2-10），我们可以得到**k**, k_0和P及e的关系。

$$p=\frac{H}{\pi}k \quad , \quad e=\frac{H}{\pi}k_0 \tag{2 -14}$$

当我们改变参照系，我们处于静止，量子波是纵波并以光速传播，量子波的波函数$\phi = \cos(kx - k_0 t)$，利用欧拉关系表达为：

$$\phi = e^{i(\vec{k}x - k_0 t)} \tag{2-15}$$

（取 c=1），式（2-15）称为波函数，这里的x和t已不再是内禀空间时间量，而是对于观测来说的时空量，也称背景时空量，这一概念后面还要谈到。

为了从（2-15）中得到能量动量，我们采用算$\hat{p}$和$\hat{e}$来求得：

$$\hat{p}\phi = p\cdot e^{i(kx-k_0 t)}$$
$$\hat{e}\phi = e\cdot e^{i(kx-k_0 t)} \tag{2-16}$$

由式（2-16）知

$$\hat{p} = \frac{H}{i\pi}\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \hat{e} = \frac{iH}{\pi}\frac{\partial}{\partial t} \tag{2-17}$$

从（2-22）知，$\hat{e}$ 和 $\hat{p}$ 就是我们所熟知的能量、动量算符相差 1/2 系数，这是由于量子波的周期为$0 \sim \pi$，而不是$0 \sim 2\pi$，这是量子波所特有的。e, p 分别为一维量子纵波的能量和动量的本征值。

第三节　一维量子波的静态应变分析

在前面的分析中，我们对一维量子波有了基本的了解，所采用的数学形式并不优美，但很直观，现在我们采用弹性理论中的静态应变分析的方式来研究组成量子波的基本单元场流形，对这种基本单元进行静态应变分析，这样我们表述问题的方式会更严谨一些，上一节量子场流形形变点的移动量就是$H(x,t)$，在应变理论中为u，所以$u = |H\cos kx|$。

位移函数u在压缩区或拉伸区中

$$u_{压} = -\frac{H}{2}\cos kx \quad , \quad u_{拉} = \frac{H}{2}\cos kx \tag{2-18}$$

我们对时空进行分开考虑。对于一维空间，只有一维存在应变，所以只需考虑x方向，

考虑拉伸区

$$u_{x1}=u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}dx$$

$$=\frac{H}{2}\cos kx-\frac{H}{2}k\sin kxdx \qquad (2\text{-}19a)$$

$$\varepsilon_x=\frac{u_{x1}-u_x}{dx}=-\frac{H}{2}k\sin kx \qquad (2\text{-}20a)$$

拉伸区场流形空间的总拉伸量

$$u_{xo'}-u_{xo}=\int_{-\Phi/2}^{0}\varepsilon_x dx$$

$$=\int_{-\Phi/2}^{0}-\frac{H}{2}k\sin kxdx=\frac{H}{2} \qquad (2\text{-}21a)$$

拉伸区场流形时间部分的应变

$$u_t=\frac{H}{2}\cos k_0 t-\frac{H}{2}k_0\sin k_0 tdt \qquad (2\text{-}19b)$$

$$\varepsilon_t=-\frac{H}{2}k_0\sin k_0 t \qquad (2\text{-}20b)$$

拉伸区时间总形变量

$$u_{to'}-u_{to}=\int_{-\Phi/2}^{0}-\frac{H}{2}k_0\sin k_0 t=\frac{H}{2} \qquad (2\text{-}21b)$$

对于压缩区间情况完全类似，空间部分

$$u_{xo'}-u_{xo}=\int_{0}^{\Phi/2}\frac{H}{2}k\sin kxdx=-\frac{H}{2} \qquad (2\text{-}21c)$$

同样，时间部分

$$u_{xo'}-u_{xo}=-\frac{H}{2} \qquad (2\text{-}21d)$$

总形变量就是拉伸和压缩区之和取绝对值

$$2(u_{o'}-u_o)=H \qquad (2\text{-}22)$$

场流形总形变量就是一维普郎克常量H，由应变分析，我们得出的结果和第一节完全相同，在这里，能量函数分区域进行表述，压缩区和拉伸区的能量函数是一样的，均为

$$e_{\Phi/2}(t)=\frac{H}{2}k_0\sin k_0 t=H\varepsilon_t \qquad (2\text{-}23a)$$

其中$e_{\Phi/2}$表示半区能量函数。同样

$$p_{\Phi/2}(x)=H\varepsilon_x \qquad (2\text{-}23b)$$

为动量函数，由（2-23）我们知道，应变在场流形理论中具有非常重要的物理意义，应变$\varepsilon_x,\varepsilon_t$的大小直接表现了量子场流形的动量，能量的大小，而$\varepsilon_x,\varepsilon_t$则是基本单元场流形的相对应变量。

第四节　一维量子波的内禀力场

当场流形发生形变，若形变是均匀拉伸或是均匀压缩，如下图 2-2(a)所示。

对于均匀形变，场流形依然是三维的，且空间仍然保持平直特性，因而不存在可观测性，这样的平直场流不存在力场。表现为真空态。

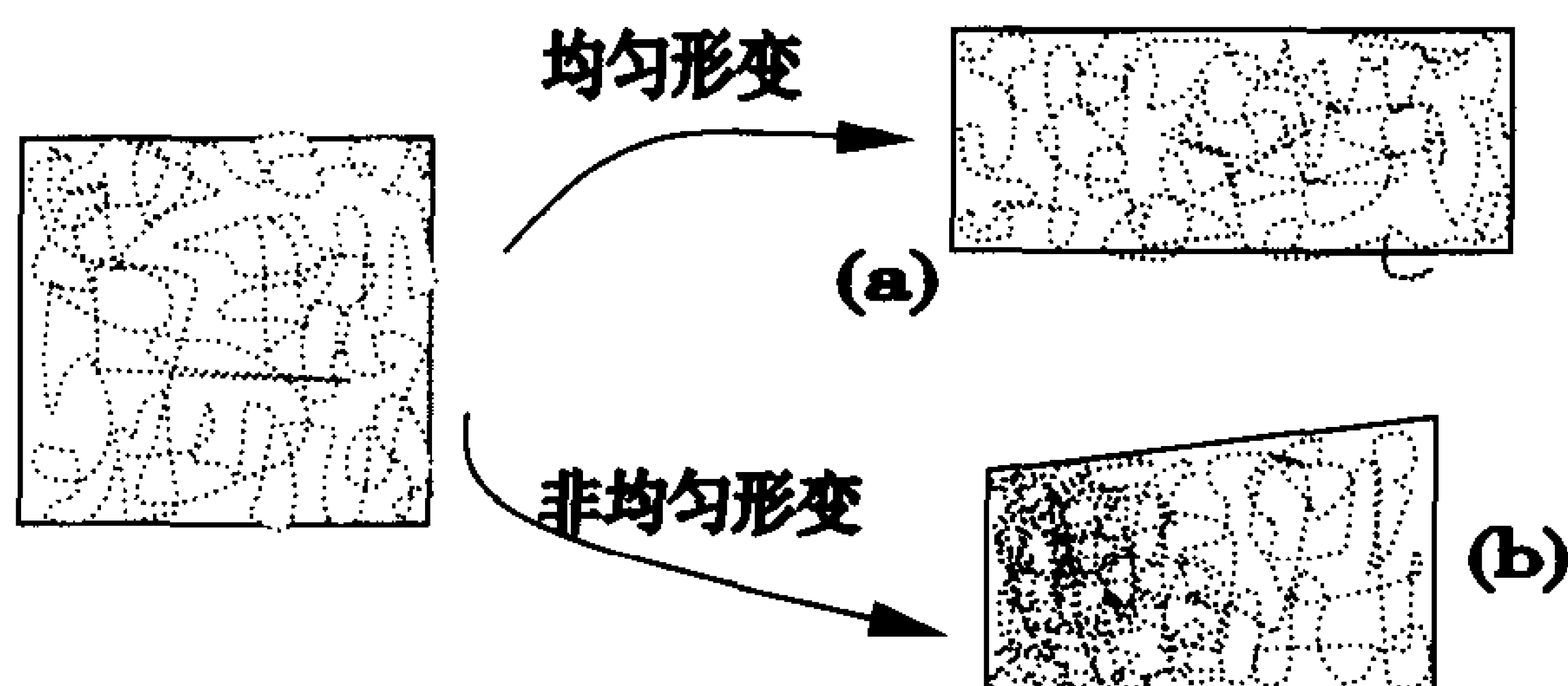


图 2-2 场流形应变

如果形变是非均匀的，如图 2-2 中（b）所示，那么空间就不再是平直的，是弯曲空间，更确切地说是场流形（时空）发生弯曲，对于弯曲场流形内，若存在于相对于场流形静止的参照系，便有可观测效应，这种可观测效应表现为力场。对于场流形来说，场流形越不均匀，则力场也就越强，现在我们对力场强度作出如下定义

$$力场强度=k\nabla\varepsilon_i \tag{2-24}$$

k 为常数，为使问题简化，取 k 等于 1。ε_i 为第三维空间应变量，对于一维场流形来说，力场强度

$$g_x=\frac{d\varepsilon_x}{dx} \tag{2-25}$$

一、均匀场流形

当场流形被均匀压缩或均匀拉伸时，场流形仍然保持平直特性，即对于应变

$$\varepsilon_x=const \tag{2-26}$$

则

$$g_x=0 \tag{2-27}$$

无力场存在。

二、非均匀场流形

对于一维量子场流形的压缩区

$$\varepsilon_{x压}=\frac{H}{2}k\sin kx \tag{2-28a}$$

有

$$g_{x压}=\frac{H}{2}k^2\cos kx \tag{2-29a}$$

对于拉伸区

$$\varepsilon_{x拉}=-\frac{H}{2}k\sin kx \tag{2-28b}$$

有
$$g_{x拉} = -\frac{H}{2}k^2\cos kx \tag{2-29b}$$

(2-29a)或和（2-29b）相差一个负号

$$g_{x压} = -g_{x拉} \tag{2-30}$$

表明两者大小相等，方向相反，这种力场的方向和 x 是平行的。

对于三维极化场内禀力场强度 $g=\nabla\vec{\varepsilon}$。由式（2-30）知，同类力场相斥而异类相吸。这里要特别注意的是两极化场内禀场流本身并不会相互作用，因为两种场流形叠加而形成一种叠加态场流形，如同两列相遇的波并不相互作用。内禀力场之间的作用是由极点表现出来的。当极点处于非均匀场流形中，极点便受到力场的作用。两极化场的极点都进入彼此的内禀空间内，两极点同性相斥而异性相吸。由于极点是极小的点，内禀场流形对极点的作用是很弱的，但可以诱导出连接两极点的作用场纤。两极点的作用主要是通过场纤（作用通道）传递玻色子来实现相互作用的。这种特殊性质表现为粒子具有耦合常数性质。这种特性只适合内禀力场作用。关于这种性质在以后的耦合常数以及弱作用等章节中有详细论述。

第三章　三维量子波场流形

第一节　三维量子波场流形的建立

在第一章中，我们分析了一维量子波，即一维量子场流形，并建立了一维量子波的能量、动量、时间以及普郎克常数等的物理概念。显然，我们所生存的是三维空间而非一维空间，因而不存在理想的一维场流形，当然也就不存在一维量子波，我们的世界是三维的，所以只有三维场流形中的三维量子波才接近真实情况，现在我们来考虑三维场流形的情况。

由假设 I 知，真空流形是均匀平直三维场流形，且存在着拉伸压缩极限，于是我们作出如下考虑：

在真空场流形中存在一个点O，并以 O 为原点，如图 3-1，建立一个静止参照系，在场流形处于平直状态时，场质无任何形变，场流形处于一种自然状态。当 O 点移动时，会对空间周围产生影响，而在三维流形中，是各向同性的，于是周围的流形发生变化，形成纤维场流形量子波，如图 3-1 所示，拉伸纤维场的量和压缩纤维场的量相等，总量为两球相交的部分，而 R 表示形变区域为球体的半径，在 R 以外无形变，这里的 R 和一维场流形的中的 λ 相类似。

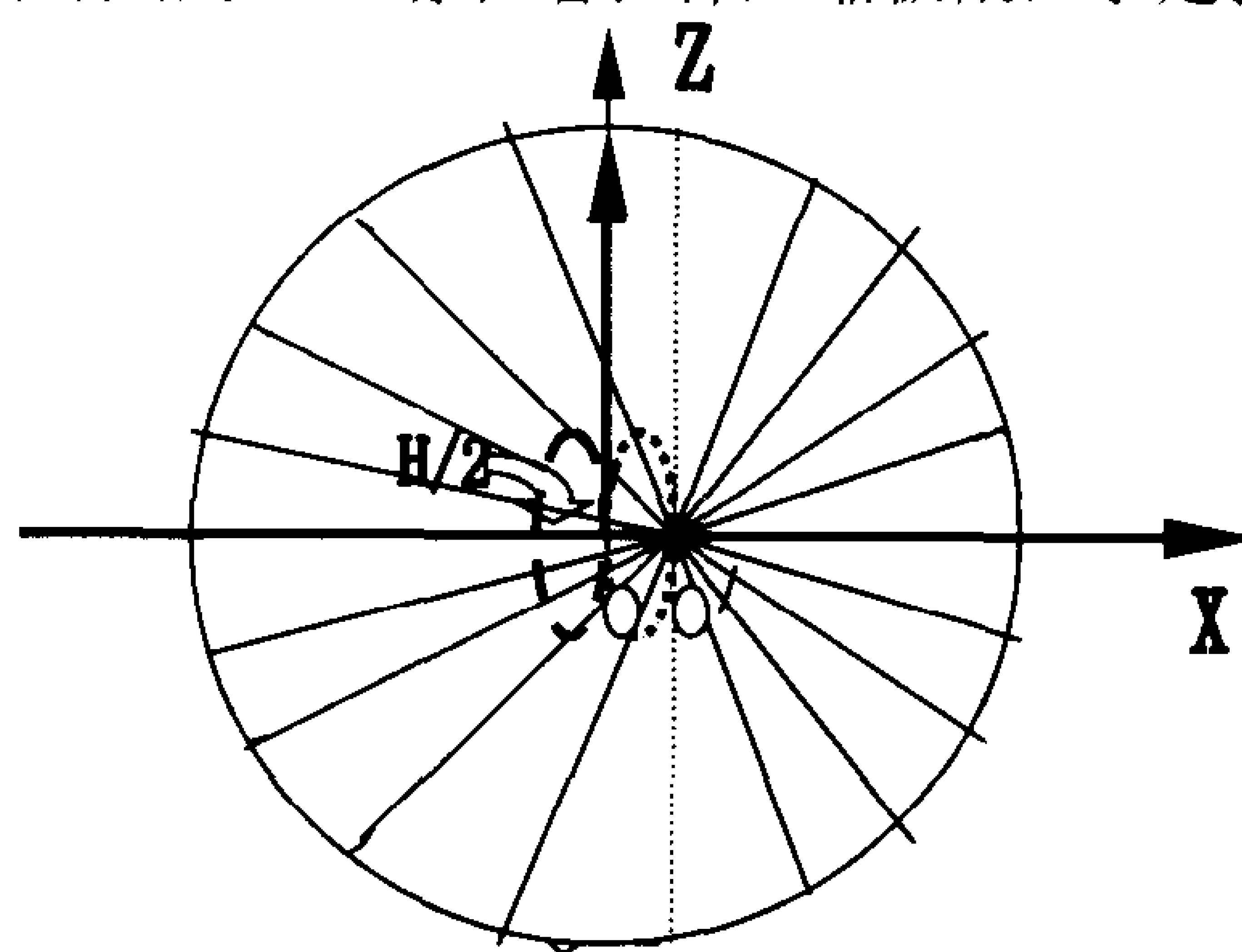


图 3-1　量子波的形成

一、三维量子波的纤维结构

量子波灵点场质(基本单元场质)向前移动，压缩前方场质并拉伸后方场质，就造成极心附近的场流形极度弯曲，这种极度弯曲使场质在沿 r 的方向达到压缩极限时，仍不能满足弯曲的曲率，于是便使场质产生纤维结构，只有场纤结构才能满足灵点所造成的场流形极度弯曲，如图 3-2 所示，于是就形成了纤维场。图中的虚线为量子波的内禀空间球壳层。在内禀空内拉伸区的场纤被拉伸，压缩区的场纤被压缩。应变场质为纤维流形。这里要特别注意的是灵点场质的量就决定了场纤的数量(参见第四章第十节极化场的纤维特性)。由于量子波灵点和极化场极点都是一基本单元场质，因而量子波的场纤量和极化场的场纤量

是相同的。与极化场不同的是沿 yz 面附近的场纤应变很小, yz 面上场纤形变则为零。

对于量子波来说,由于量子波灵点的基本单元场质为非游离态场质,因而不存在电荷。

对于压缩区 o' 附近的某一份场质在 yz 方向场质虽然被压缩，但其应变小于沿 x 方向的应变，于是沿 x 方向的场质会向前移动一个量 ε，如图 3-3(b) 所示，并不改变基本单元场质的三维特性，和其紧密相连的基本单元场质也会发生 x 维的场质向前移动一个小量 ε_r，这样一直持续下去，就在 x 方向上形成压缩场纤。在压缩区则形成压缩场纤；在拉伸区则形成拉伸场纤。场纤应变 $\varepsilon_r = u_r(r,\varphi,\theta) = \dfrac{H}{2}\sin\theta\cos\varphi\cos\dfrac{\pi r}{\phi}$，即满足式(3-3)。场纤的长度为内禀空间半径，限制在内禀区域内。对于拉伸区来说，情况正好相反，也同样形成了场纤，但场所是向后移。

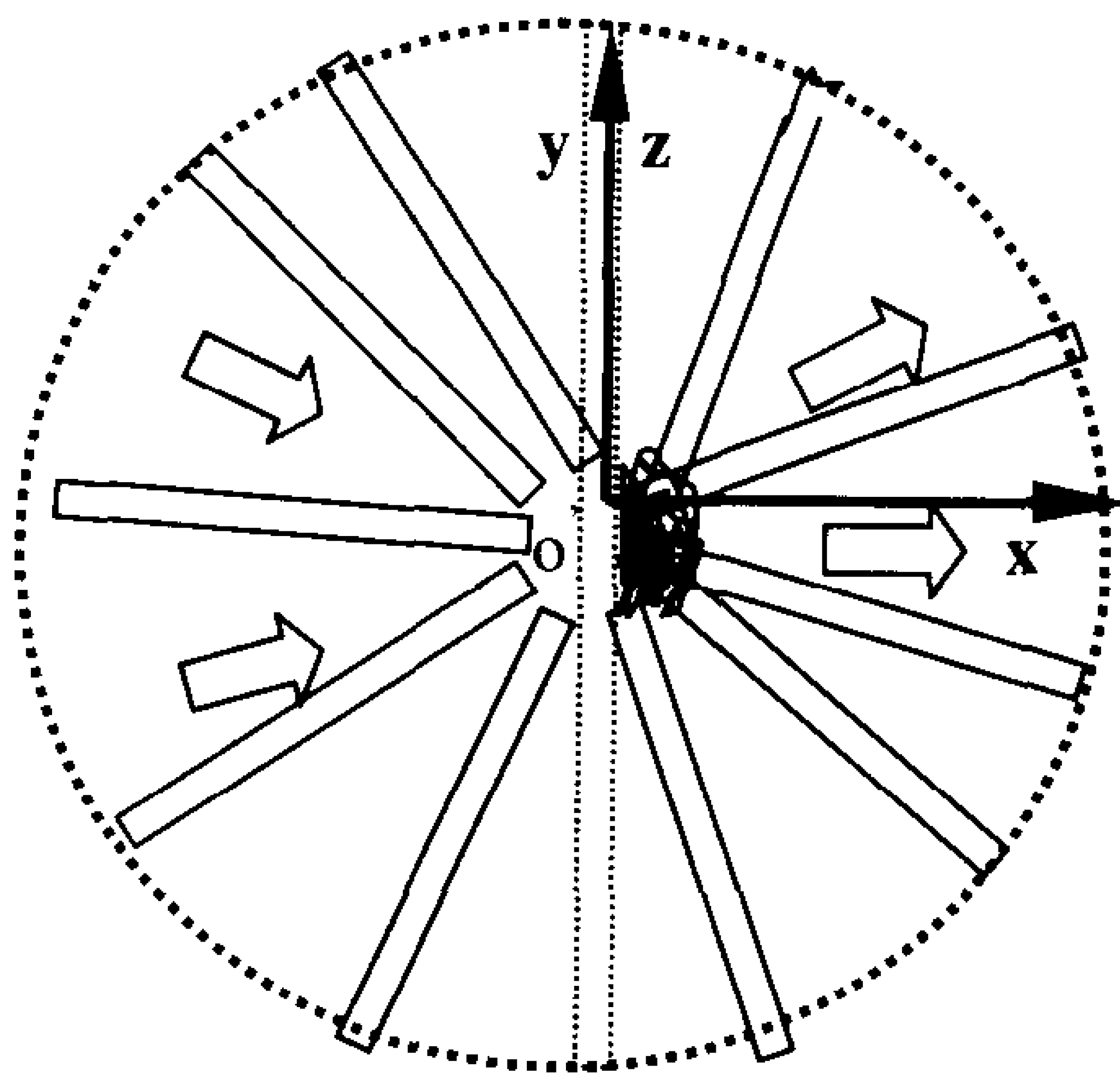


图 3-2 量子波场纤结构

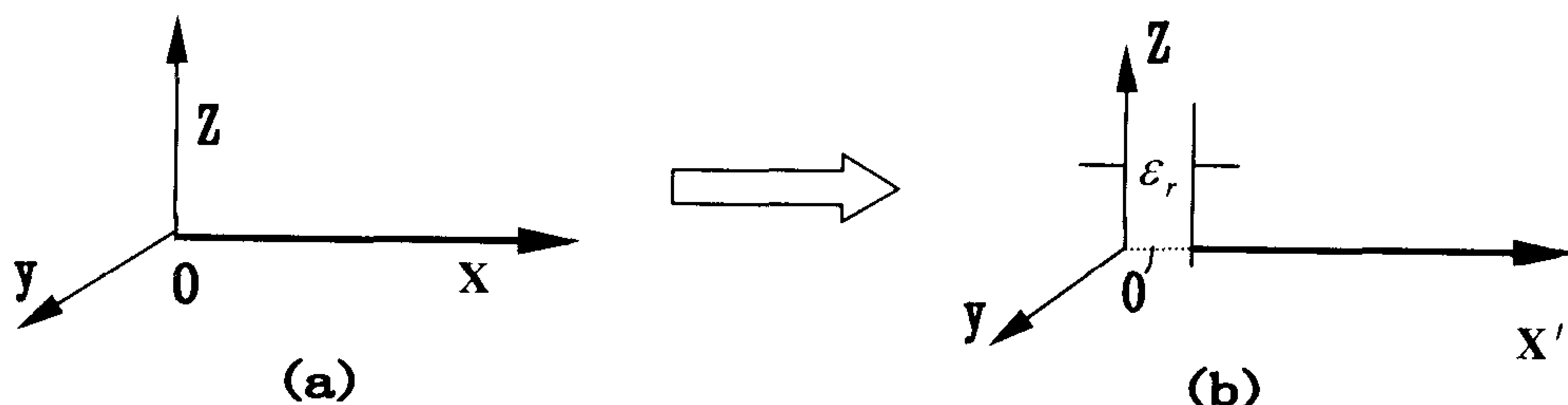


图 3-3 纤维场单纤维的形成

这里，我们还注意维度独立性。我们说某点场质具有完备的三维特性，是由 x、y、z 维的场流形构成，并称这三维度独立性，即 x 值场质沿 x 移动一个小量 ε_r，并不改变 z、y 维场质的性质，彼此是独立的，即场质具有维度的独立性。

纤维场的存在不改变场流形维度特性，对整个场流形时空没有影响，因而量子波对时空没有任何影响。对于正纤维场和反纤维场相遇，场质有一种恢复平直状态的趋势，使两者力图结合在一起，参见图 4-17。这使是我们所熟知的电场。电场的本质是纤维场流形。

二、三维量子波的内禀结构

当我们进入至三维 h 流形的内禀空间，建立静止参照系，并在三维量子波的中心建立坐标架，这样我们便能研究三维量子波的静态结构，这里所指的静态结构就是量子波的内禀结构。

在点 O 处建立一个直角坐标架，当点 O 移动至 a 时，于是点周围的纤维场流形发生变化，当沿 x 方向达到拉伸，压缩极限时，即 a=$H/2$ （H 为一维普郎克常数），开始沿 x 方向传播，形成三维量子波。

在直角坐标系中，球为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{3-1}$$

O 点为球心，对于球坐标来说

$$\left.\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\theta \end{cases}\right\} \quad (3\text{-}2)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$$

这里我们可以看出量子波是球体，由于三维量子波呈球状流形，我们也可以把三维量子波形象地说成是量子球。当 O 沿 x 轴的移动量达到拉伸压缩极限 H/2 时，这也是三维量子波的形成条件。对于 x 轴以外的场质来说，虽然发生了形变，但未达到拉伸压缩极限，只有在 x 轴上才达到拉压极限而达到传播条件。因而 x 轴以外的场质不会形成波而向外传播丧失能量，三维量子波只沿 x 轴方向传播，不会形成向外辐射的球面波，于是量子波无论传播多远，都仍然保持原有的三维量子波的特性。对于三维量子波来说，纤维场流形在以 O 点为原点，R 为半径的区域中发生形变，当 O 点离开后，纤维场流形又恢复平静回到平直状态，而不带走任何能量，所以整个量子场的全部能量决定于 O 点，并称 O 点为灵点（即灵魂之点的意思）。

对于场流形来说

$$H = \int_0^{\lambda} H(x,t)dx = c\int_0^{t_\Phi} H(x,t)dt$$

$H(x,t)$ 是一维内禀结构函数，现在我们要找以三维量子波的纤维场内禀结构函数 $h(\theta,\varphi,r)$ 当 0 点沿 x 轴移动 $H/2$，可以把 x 轴视为一维场流形，现以 O' 为圆心

$x_0 - x_{0'} = H/2$，在 x 轴上，考虑拉伸区

$$\frac{H}{2} = \int_0^R \frac{H}{2}\cos\frac{\pi}{\phi}r \cdot d(\frac{\pi}{\phi}r)$$

在 yz 面上场流形无形变，H 在 yz 面上为零，考虑在 yz 面上，当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 为 0，φ=0 时沿 x 为 $H/2$，H 的分布应满足

$$u_r(r,\varphi) = \frac{H}{2}\cos\varphi\cos\frac{\pi r}{\phi}$$

再考虑 θ 方向，θ=0 时，H 为 0，在球坐标中：

$$u_r(r,\varphi,\theta) = \frac{H}{2}\sin\theta\cos\varphi\cos\frac{\pi r}{\phi} \quad (3\text{-}3)$$

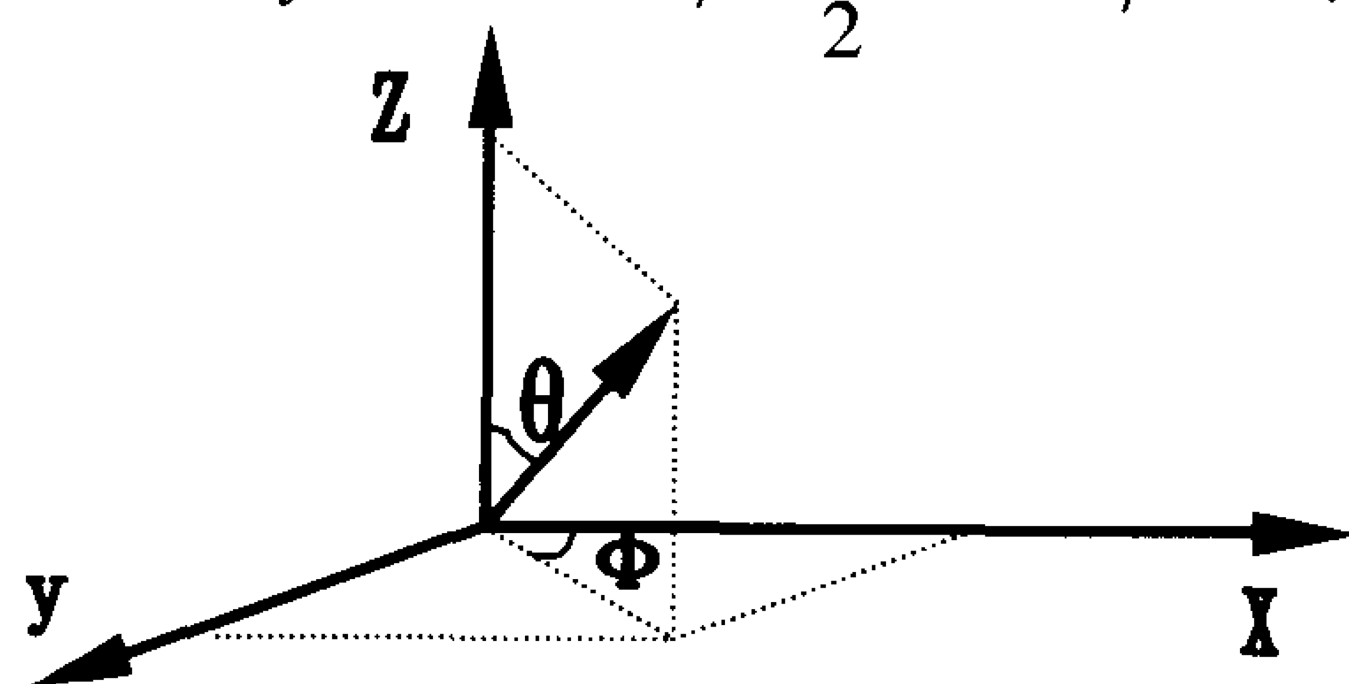


图 3-4 球坐标

三维量子波是沿 x 维方向传播的，在 x 维方向上，三维量子波的场形变和一维量子波的场形变是完全一致的，满足 $R \cdot p = H/2$。考虑到三维量子波是纤维场，场应变是特指纤维的应变。现在我们从纤维场的性质来建立普郎克关系式。在量子球内所有的场纤的长度均为 R，所以我们考虑某量子球的某一维场纤的情况，那么就存在这样的关系：$\frac{H(\theta,\varphi)}{2} = R \cdot p(\theta,\varphi)$。当我们考虑量子球内所有的场纤的总应变，设所有的场纤的总共有 N 根场纤，则有

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{H_i(\theta,\varphi)}{2}=\sum_{i=1}^{N}[R_i\cdot p_i(\theta,\varphi)] \tag{3-4}$$

其中$\sum_{i=1}^{N}\frac{H_i(\theta,\varphi)}{2}$就是我们现在所要求三维量子波中的纤维场流形总形变量$\hbar$(特指玻色子)，即$h_b=\sum_{i=1}^{N}\frac{H_i(\theta,\varphi)}{2}$。当$N$很大时，这种累加变为积分。在球坐标(如图 3-4 所示)中$u_r(r,\varphi,\theta)=\frac{H}{2}\sin\theta\cos\varphi\cos\frac{\pi r}{\phi}$为单纤维的应变，考虑θ为 0~$\frac{\pi}{2}$的范围，$\varphi$也为 0~$\frac{\pi}{2}$的范围，由球坐标求体积的三重积分得：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\hbar &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi\int_0^{R} u_r^{\ 2}du_r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi\cdot\frac{1}{3}[\frac{H}{2}\sin\theta\cos\varphi\cos\frac{\pi r}{\phi}]^3\,|_0^R \\
&= -\frac{1}{3}(H/2)^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi \\
&= -\frac{4}{9}(H/2)^3
\end{aligned}$$

考虑绝对值

$$\therefore\hbar=\frac{32}{9}(H/2)^3 \tag{3-5}$$

当然从另一方面我们总能对所有的单根场纤的总应变找到一个平均值$\overline{H}$，使得

$$N\frac{\overline{H}}{2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{H_i(\theta,\varphi)}{2} \tag{3-6}$$

对于$\sum_{i=1}^{N}[R_i\cdot p_i(\theta,\varphi)]$这一项我们也同样能找到一个平均值$\overline{p}$，对于某量子波$R$与$\theta,\varphi$无关，于是有

$$N(R\overline{p})=\sum_{i=1}^{N}[R_i\cdot p_i(\theta,\varphi)] \tag{3-7}$$

综合(3-4), (3-5), (3-6) 式，得到

$$\hbar=N\frac{\overline{H}}{2}=R\cdot N\overline{p} \tag{3-8a}$$

类似我们可得到

$$\hbar=N\frac{\overline{H}}{2}=R_0\cdot N\overline{E} \tag{3- 8b}$$

我们做这样的定义，定义

$$p_b\equiv N\overline{p} \qquad\qquad E_b\equiv N\overline{E} \tag{3-9}$$

p_b和E_b分别是量子波的总动量和总能量，$\hbar$则为总形变量，进一步简化有

$$\hbar = p_b \cdot R = E_b \cdot R_0 \tag{3-10a}$$

这是纤维场流形所特有的。有趣的是无论量子球的大小如何，量子波场纤的总数都是相同的，并且极化场的场纤总数也为 N，这一性质是由场流形本身的性质决定的。因而 N 为常数。对于实际测量来说，我们只能是沿某一方向进行的，能观测到量子波(包括三维量子波和运动的极化波)的横波的波长。

式（3-10）称为三维量子波的普郎克常数的定义式，这个普郎克常数就是我们现在所熟知的量子物理学中的普郎克常数。量子球直径 $\Phi = 2R = 2\lambda_{//}$ (参见图 3-7)，三维量子波是纵波，振波方向和传播方向一致。三维量子波球体沿 x 方向传播的球形半径 R 的大小直接表征了量子波沿 x 传播方向的应变的大小。为了更符合我们的习惯，把 R 用 x 来代替，三维量子波纵波

$$\phi_{//} = e^{i(\bar{k}\bar{x} - k_0 t)} \tag{3-10b}$$

$$\hbar = \Delta x \cdot p = \Delta t \cdot E$$

算符仍为一维形式

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i\lambda}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} = -\frac{\hbar}{i\lambda}\frac{\partial}{\partial t} \tag{3-11}$$

对于三维量子波来说，形象地表达为量子球的传播速度为 c，具有能量 E 和动量 p。把整个量子纵波视为一个整体，具有强烈的粒子性。这种量子球是纵波，因而纵波所表现出的是粒子性。

如图 3-5，场的形变被艰制在半径为 R 的球面内。空白表示拉伸场流形，颜色深则表示压缩场流形，球壳以外的为平直三维场形。由图 3-1 和图 3-5 以及式（3-4）可知，量子波在 yz 面上没有场形变。而在 x 方向上，场形变量是最大的。于是在 x 方向上在静止参照系下，o' 点是不动的。而当这个量子球受到扰动之后，由于在 x 方向场形变量最大,就会形成一种场弦，于是极心 o' 点就会沿 yz 面(场形变量为零)振动，从而形成量子场特有的横波，要注意的是这种振动过程中，弦的端点 ab 仍然在 x 轴上，极心在量子球的球壳内振动，整个量子球的运动方向没有任何改变。

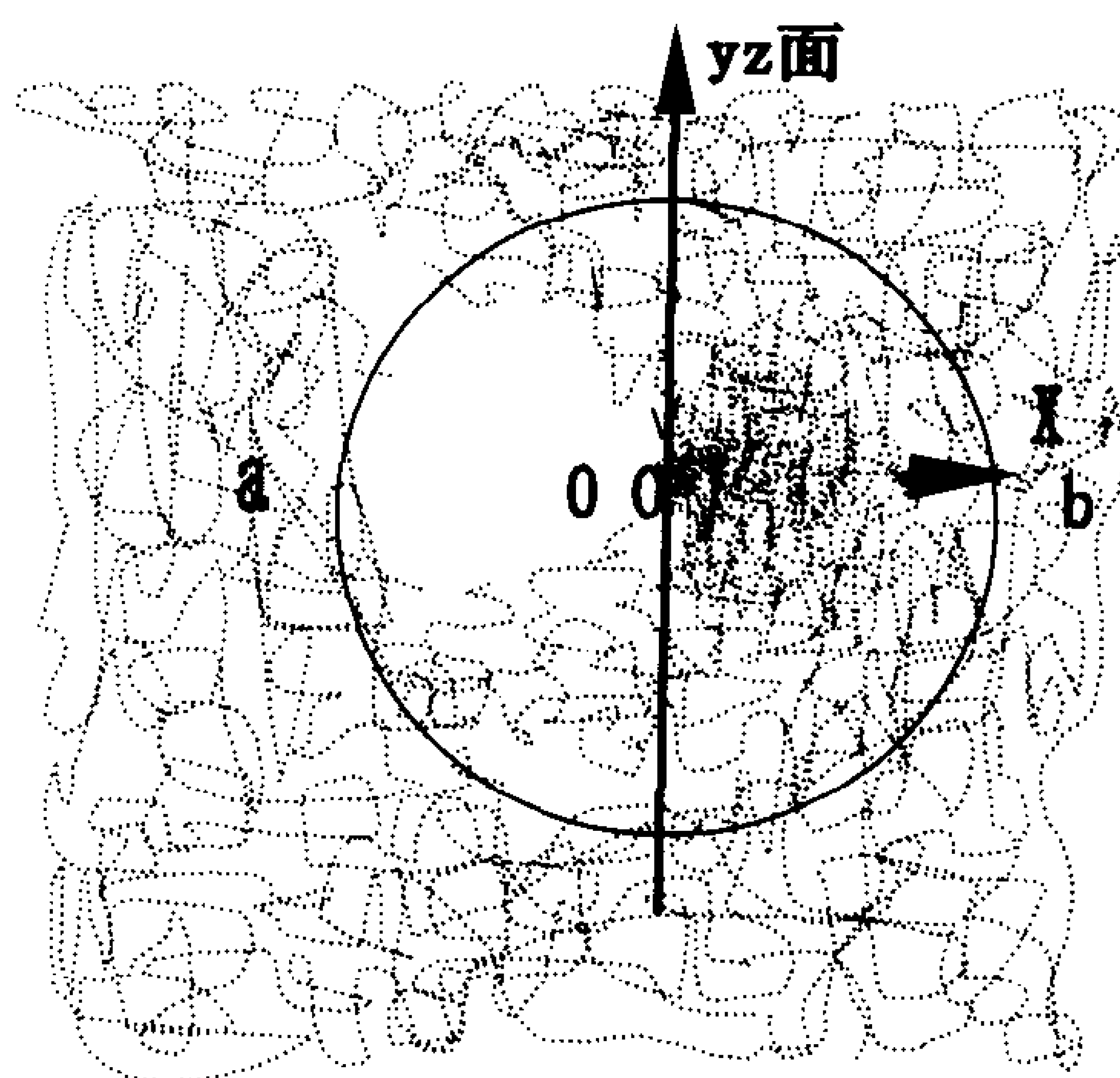


图 3-5 量子波的场流形形态

现在我们来分析量子场的横波的情况：在没有受到扰动时，量子波的灵点轨迹是一条直线，量子球的传播速度是 c，这是三维场流形波的极限速度。受到扰动后。o' 沿 yz 面振动，为了分析方便，我们便设是沿 y 轴振动。为了理解三维量子波的横波特性，我们还应该知道维度独立原理。我们来做如下的假想实验：如图 3-6 所示，一束光通过 n 条与之垂直的光线后，所测的光速应该仍然为 c，而没有改变。

这个假想实验说明，对于同一点来说，沿 x 方向和 y 方向场的传播速度均为 c，互不影响，相互独立，这就是场的独立传播原理，根据这个原理，我们可以想见量子球灵点沿 y 轴振动(振动的本质还是波的传播)不影响沿 x 的传播，即量子球的沿 x 的速度仍然为 c，

而在 y 轴上，灵点的最大速度是 c，最小为零，灵点轨迹如下图所示。

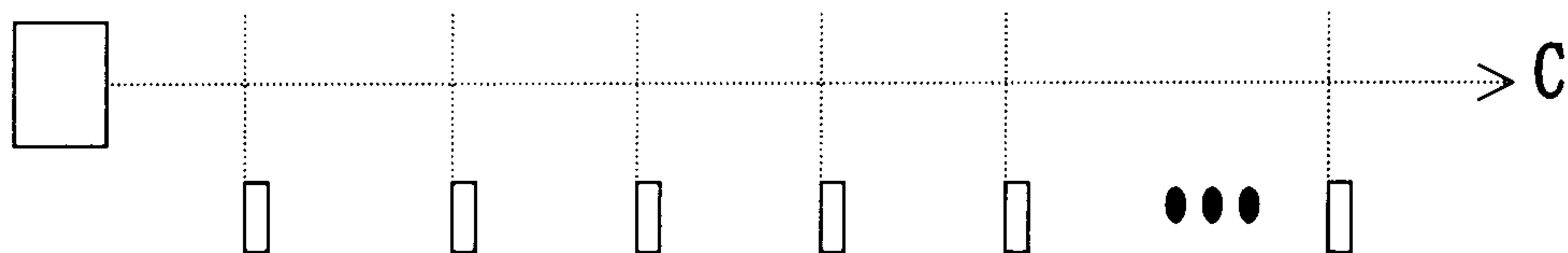


图 3-6 维度独立性实验

在 y 方向的运动规律是简谐振动，灵点在达到量子球的球壳时，其速度为零；而在过 x 轴时，速度为 c，于是 $v_y = c \cdot \cos kx$，其中 $k = \pi / \lambda_{\perp}$。在沿 x 轴方向上，灵点永远以

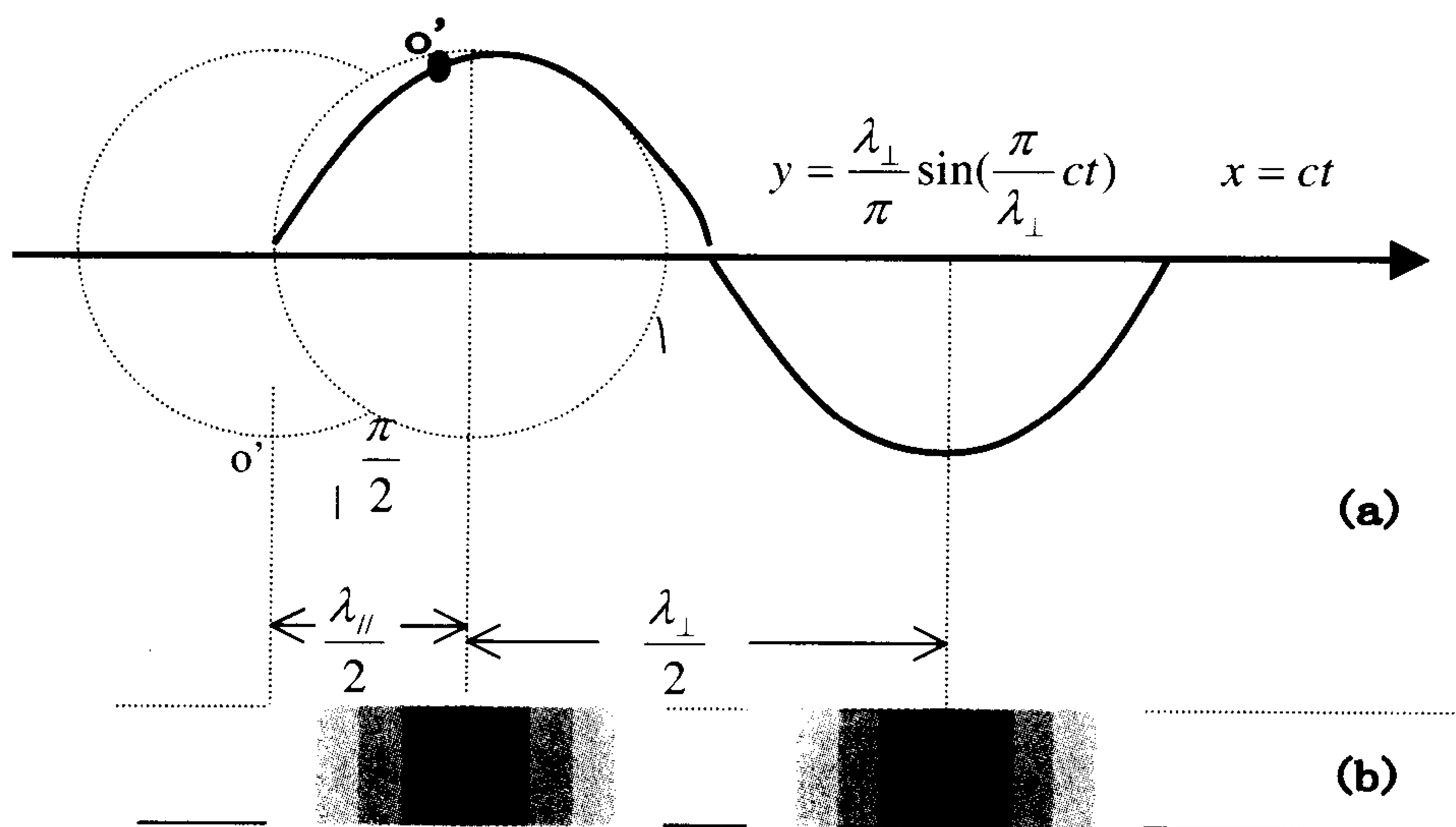


图 3-7 量子波灵点轨迹及其概率

光速 c 运动，并不受 y 方向的影响，所以 $v_x = c$，灵点的运动轨迹满足余弦函数 $\cos kx$，如图 3-7a 所示，在这个合成轨迹上，极心的速度 v 为

$$v = c\sqrt{1+\cos^2 kx} \tag{3-12}$$

我们由（3-12）式可以看出，当 $kx = n\pi$ 时（n= 0,1,2,⋯），v 为极大值，当 n 为 $n\pi/2$ 时（n=1,3,5，⋯），v 为极小值，于是 o' 点在波峰上，速度最小为 c，而在 x 轴上速度最大为 $\sqrt{2}c$。灵点这种合成速度为相速度，显然相速度是超光速的，但从维度的独立传播原理来看，并未超光速。由于在波峰上极心的相速度最小，则机率最大，而在 x 轴上极心的相速度最大，则机率最小，如图 3-7b 所示。

这里要提出注意的是: ①灵点在 y 轴方向的振动的四维动量是由量子球本身的四动量分出的一部，总的四动量并没改变，量子波总的形变量仍然是 $\hbar$。②量子波在未受扰动之前并无横波，量子波的波动性是由横波特性表现出来的，而横波特性是受扰动而产生的结果。或者说原始光子并无波动性。但一般来说原始光子几乎是不存在的，产生光子的过程本身就是一种扰动，另外测量的本身也赋予了量子波的波动性。

现在，我们知道受扰量子波由横波和纵波两部分构成，那么这两部分有什么关系呢？我们先来看纵波波长 $2R$ 和横波波长 λ 间的关系。如图 3-7a 所示，余弦曲线为极心轨迹，为了方便标记，记纵波的波长为 $\lambda_{//}$，沿 x 方向。记横波的波长 $\lambda_{\perp}$，振动垂直于 x 方向，沿 y

方向为横波。满足 $x = ct$， $y = \frac{\lambda_\perp}{\pi}\sin(\frac{\pi}{\lambda_\perp}ct)$，当 $\frac{\pi}{\lambda_\perp}ct$ 取 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 时有如下关系：

$$1:\frac{\pi}{2} = \frac{\lambda_{//}}{2}:\frac{\lambda_\perp}{4}$$

有 $\pi\lambda_{//} = \lambda_\perp$ （3-13）

定义 $2\pi\hbar \equiv h$ （3-14）

对于横波有如下关系

$$p\lambda_\perp = 2\pi\hbar \tag{3-15}$$

即

$$p\lambda_\perp = h \tag{3-16}$$

这里的 h 是我们所熟知的三维场流形量子波波动性所表现出的普郎克常数，由（3-14）知 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$，所以（3-15）式变为

$$p \cdot R = \hbar \tag{3-17a}$$

上式可以判别量子球的大小。$\lambda_{//} = 2R$，即量子球的直径，而要精确地确定量子波灵点的位置，当我们沿某一方向测定时，由量子球表面到极心的位置就是 R，考虑到另一个量子场的内禀场流形区域也存在内禀空间，有 $\Delta x \geq R$，由（3-17a）知

$$\Delta p \cdot \Delta\Phi \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3-17b}$$

这便是所熟知的测不准关系式。当一个量子场碰上另一个量子球后，只要进入量子球球壳以内，使灵点造成扰动，并改变量子球的运动位置，于是无法准确测知(或用一个量子场感知另一量子场)该量子球灵点的位置，我们用实验感知的极限便是用一个量子场去感知另一个量子场。

量子场的纵波和横波都可以用余弦函数来表达。和第二章的分析相类似，我们能得到横波的波函数：

$$\phi_\perp = e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} \tag{3-18a}$$

和纵波不同的是横波的周期为 2π，比纵波多 π。

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{3-19}$$

$$k_0 = \omega, \qquad E = \hbar\omega \tag{3-20}$$

算符和一维场的形式完全相同。

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{E} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} \tag{3-21}$$

波函数写成四维形式

$$\phi_\perp = e^{ikx} \tag{3-18b}$$

在这一节中，我们讲述了单个量子波的横波和纵波的情况，所讲述的是量子场的内禀结构，并知道了量子波为什么存在普郎克常数，以及四动量 p 和波粒二象性(这一部分在论述光子时还有论述)。

量子波横波和纵波应变应满足 $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_\perp + \vec{\varepsilon}_{//}$。其中 $\vec{\varepsilon}_{//} = \varepsilon\sin\omega t$　$\varepsilon_\perp = \varepsilon \cdot \cos\omega t$，$\vec{\varepsilon}_\perp$

对于单纤维应变无振动时$u_r(r,\varphi)=\frac{H}{2}\cos\varphi\cos\frac{\pi r}{\phi}$，有振动时则有

$$u_{r//}=\frac{H}{2}\cos\varphi\cos\frac{\pi r}{\phi}\cdot\sin\omega t \tag{3-22a}$$

$$u_{r\perp}=\frac{H}{2}\cos\varphi\cos\frac{\pi r}{\phi}\cdot\cos\omega t \tag{3-22b}$$

对于原始量子波考虑某场纤应变$u_r=\varepsilon$，$u_\vartheta=u_\phi=0$为球对称球场，量子波内禀流形为轴对称非球对称场流形

$$g_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}\quad g_\vartheta=\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{u_r}{r})=g_\phi\neq 0$$

$g\neq 0$说明存在加速度力场，量子波场流形分布因是纤维场，对时空并无影响，但表达了纤维场的场强分布形态，换而言之纤维场的作用力是非均匀的。由于耦合的通道效应使得作用形式表现为耦合概率密度大小，而非加速度的大小。形象地讲，在沿量子波的传播方向上(x方向)场强大，作用的可能性就大；而与传播方向垂直的y方向上场强最弱，在该方作用的可能性就小。具体可参考后面第五章耦合常数一节的内容。

三、量子波的质量

量子波是没有静质量的，以后我们会知道量子波就是光子。光子表现为纯动量形式。但这并不意味着光子没有重量。虽然光子是纤维结构，光子场纤场纤和极化场纤不同,具有应变。而任何应变都会对背景时空流形产生一个小的影响，使得背景时空流形发生非常微小的应变，而这种应变流形(即弯曲时空)就是引力场。由于背景时空流形发生的弯曲非常微小，对于光子内禀空间内外的时空几乎无影响。对于场流形理论我们有这样的结论：所有的量子场流形应变都会对背景时空流形产生影响，这种影响与量子场应变大小严格成正比；并与量子场应变的形式和结构无关。换而言之，所有的能量都有重量，尤其是，光子也有重量。由式(3-10) 知

$$\hbar=p_b\cdot R=E_b\cdot R_0$$

$$m_b=\frac{E_b}{c^2}=\frac{\hbar}{R_0c^2}=\frac{2\pi\hbar}{\lambda c^2} \tag{3-23}$$

m_b就是量子波的动质量。λ是量子波的横波波长，可见波长越短质量越大。

第二节　三维量子波的量子表述

一、李括号表示

在了解了三维量子波的内禀结构之后，我们再来看一下量子场的整体特性，对于量子波的纵波来说：　$\hbar=\lambda\cdot\vec{p}$

取$\lambda=\frac{\lambda_{//}}{2}$。在几何上，可以把李括号$[\vec{v},\vec{w}]$解释成为一个不完整平行四边形的开部，如图 3-8(a)所示，这个四边形开部以外的边是沿着$\vec{v}$和$\vec{w}$的积分曲线的等参数增量。

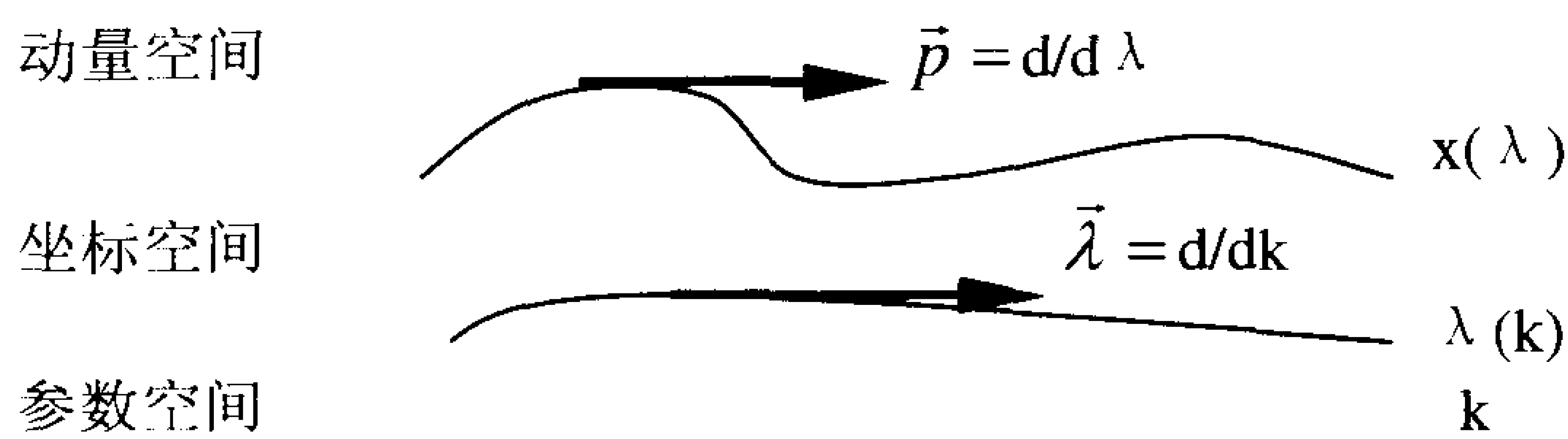


图 3-8(a) 参数空间切向量

在量子场中，定义$\vec{\lambda}$为空标空间的切向量，$\vec{p}$为动量空间的切向量。

如图 3-8a 所示，$d/d\lambda$ 的积分曲线为$x(\lambda)$，d/dk 的积分曲线为$\lambda(k)$

$$\vec{\lambda}=x\frac{\partial}{\partial\lambda}=x\vec{e}_x=\frac{d\lambda}{dk}\frac{\partial}{\partial\lambda}=\frac{d}{dk} \tag{3-24a}$$

$$\vec{p}=p\frac{\partial}{\partial x}=p\vec{e}_p=\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{d}{d\lambda} \tag{3-24b}$$

有

$$x^i(B)-x^i(A)=[e^{\varepsilon d/d\lambda},e^{\varepsilon d/dx}]x^i\mid_p$$

$$[e^{\varepsilon d/d\lambda},e^{\varepsilon d/dx}]x^i=[1+\varepsilon\frac{d}{d\lambda}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{d^2}{d\lambda^2}+0(\varepsilon^3),\ 1+\varepsilon\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}+0(\varepsilon^3)],$$

$$x^i(B)-x^i(A)=\{\varepsilon^2[\vec{\lambda},\vec{p}]+0(\varepsilon^3)\}x^i\ \Big|_p \tag{3-25}$$

正好就是$\vec{\lambda}$，$\vec{p}$组成的不完整四边形的开部，即是由于单量子场的存在造成的总的形变量就是$\hbar$，如图 3-8(b)所示。

由于$\hbar$量子场的存在，沿$d/d\lambda$和$d/d\lambda_2$要走一段曲线，而这正好就是场流形中量子波的场的最大形变量$\hbar$，采用李括号以后，可以扣除背景流形中的场形变部分，于是这样的表述，可以适用于更宽的范围。

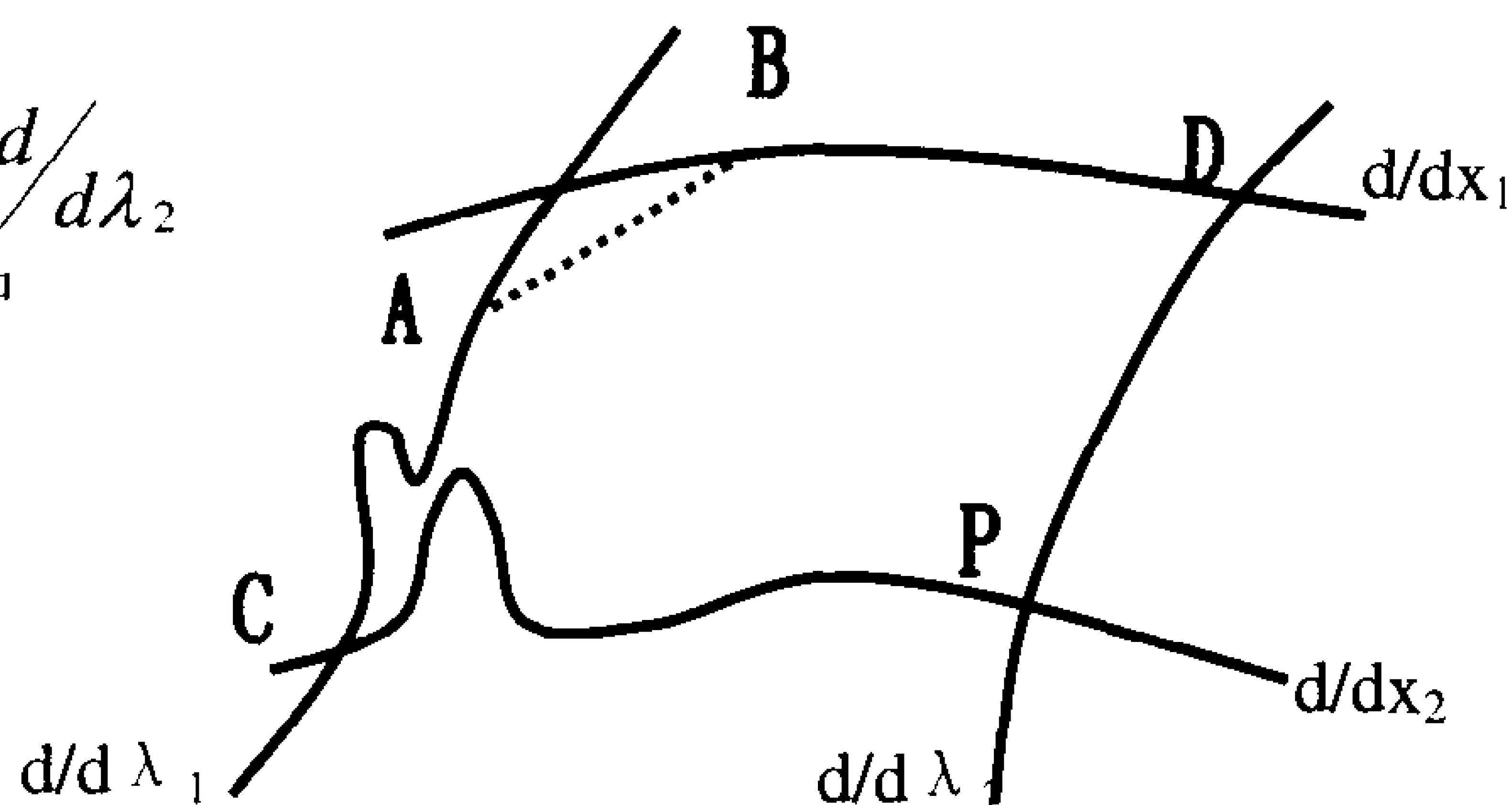


图 3-8(b) 量子波的李括号示意图

二、算符的对易关系

现在，考虑三维量子波整体性质，把三维量子波横波灵点出现的位置用几率波的概念来代替，使问题简化。对于单个粒子的内禀特性(纵波和横波)不加以考虑，把量子波简化为一个点，即灵点，这样，我们只考虑灵点的位置，并认为灵点具有能量，动量以及普朗克量，经过这样的简化之后，我们用波函数来表示，而几率波正是横波的统计表现，所以波函数和横波有相同的形式，只是系数不同，更广义地，三维量子波和极化场耦合之后，并不改变量子波的特性，我们把耦合的和非耦合的波统一用ψ表示。

对于坐标 x 和动量 p_x，我用坐标算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}_x$ 代替，$\hat{p}_x$ 是个微分算符，$\hat{x}$ 对波函数的作用是相乘，对于任一波函数 ψ，有

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi = \frac{\hbar}{i}x\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\hat{p}_x\hat{x}\ \psi = \frac{\hbar}{i}x\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = \frac{\hbar}{i}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\hbar}{i}\psi$$

这两个结果并不相同，且

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi - \hat{p}_x\hat{x}\psi = i\hbar\psi \tag{3-26}$$

由于 ψ 是任意波函数，我们把上式写为

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \equiv \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$$

同样

$$[\hat{y}, \hat{p}_y] \equiv \hat{y}\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{y} = i\hbar$$

$$[\hat{z}, \hat{p}_z] \equiv \hat{z}\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{z} = i\hbar$$

以及

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{x}, \hat{p}_y] \equiv \hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{x} = 0 \\ &[\hat{x}, \hat{p}_z] = \hat{x}\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{x} = 0 \\ &[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = \hat{p}_x\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{p}_x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-27}$$

式（3-27）对易。

量子波作圆周运动(或更确切地说量子波传播轨迹是圆周)便有了角动量的概念，我们来看角动量算符 $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ 之间的对易关系。

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x = i\hbar\hat{L}_z \tag{3-28}$$

同理可得

$$\begin{aligned} &[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = \hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y = i\hbar\hat{L}_x \\ &[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = \hat{L}_z\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}_z = i\hbar\hat{L}_y \end{aligned} \tag{3-29}$$

（3-28）和（3-29）三式可以合写为一个矢量公式

$$\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hbar\hat{\vec{L}} \tag{3-30}$$

上式可以看作是角动量算符的定义。容易证明 L^2 和 $\hat{L}_x$，$\hat{L}_y$，$\hat{L}_z$ 都是对易的：

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{L}_x, L^2] = 0 \\ &[\hat{L}_y, L^2] = 0 \\ &[\hat{L}_z, L^2] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-31}$$

第三节　三维场流形时间概念

一、场质的概念

形变的场流形称场质，即场物质，对于真空来说，场流形处于自由平直状态时，即场流形没有任何形变，这里没有任何物质形态存在，对于我们的感知来说，这里是绝对真空，在绝对真空中没有时空概念可言，也没有任何形式的物质存在，当场流形处于非均匀形变时，如果我们能找到一个相对固定的参照系，我们便能感知出存在一个力场，无论是拉伸场流形还是压缩场流形均一样，我们便把这种力场视为一种物质，所以场质是指发生形变的场流形，我们千万不要错误地认为拉伸场场质比对偶压缩场场质少，而是严格相等的，因为场流形的形变量是一致的，力场大小也是一致的。

二、背景时间

对于一个粒子来说，由 A 点传播到 B 点，则 t_{AB} 表示 AB 间运动轨迹场质的量,这个量值是相对于基准时钟运动所经历的场质作比较而得到的量(要注意的是在轨迹内的场流形由于传播都曾发生过场形变)。这个量称为背景时间,也就是我们现在所熟知的时间的量。

三、内禀时间

对于量子波来说，时间就是量子波场质的量，因而量子波的时间和空间是场流形本质的不同表现形式，如果我们考虑的空间是 n 维空间，那么与之相应的时间也是 n 维的，对于三维量子波来说，内禀空间是三维体积，所以时间则是三维场质的量，这里的内禀空间仅是发生形变的场流形区间，时间是量子波内禀空间场质的量。对于测量来说，总是沿某一方向进行测量的，所以是一维的，因而量子场内禀时间是没有观测效应的。这一概念是背景时间概念的抽象和引伸。

四、背景时间的维度

以前我们所考虑的时间就是背景时间。无论是什么参照系，只要参照系相对于背景场流形的运动速度小于光速，参照系内都存在背影时间，这个时间概念满足相对论时间概念。场流形中的内禀时间概念是一种更广义的时间概念，但对于背景时间来说，我们考察一个限制在某一个区域 Ω 内的运动体系，在这个体系中有 n 个独立粒子或物质块在三维流形中沿不同方向传播，选择某一个粒子的传播作为基准时钟，该粒子就是时钟粒子。如果该粒子作圆周等角速度传播，就能把运动的周期数作为时钟的量，这个量就是我们熟知的时间。①对于 n 独立个粒子或物质块在三维流形中沿不同方向传播的粒子来说，对于任意一独立个体来说：由 A 点传播到 B 点，则 t_{AB} 为 AB 间运动轨迹场质的量，显然这个量为一维量，该量和时钟粒子比较，便能得到该个体运动快慢的概念。②物质运动时，并不考虑粒子运动的方向，当然也不考虑时钟粒子运动的方向。对于 Ω 内的物质运动体系来说，各个独立体的运动位置是不断变化的，且整个体系的这种运动位置是不可能重复的。由于这种体系运动是不可重复的，因而 Ω 内体系时钟只存在一个方向，永远向前，这个方向就是时间之

箭的方向，因而时间具有一维向前特性。③物质运动的本质是量子场在三维流形中的传播。对于整个体系Ω来说，体系沿任何一个方向的场流形形变都会影响粒子的传播速度。若Ω相对于背景流形运动得快，则Ω内所有物质运动变慢，整个体系时间变慢；反之则变快。对于不同的体系来说，时钟是不同的，换而言之，参照系不同则时钟也不同，所以时钟具有局域性。④场质是形变的场流形，所以场质总是以传播的方式存在，这便给以了时间的传播特性。对于量子波来说，背景时间满足：

$$ct - X(\lambda) - Y(\lambda) - Z(\lambda) = 0$$

即

$$tr\begin{vmatrix} ct & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z(\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

其中，λ为参数。$X(\lambda)$，$Y(\lambda)$，$Z(\lambda)$为弯曲空间的标架。

第四章　三维极化场

第一节　有静质量场的三维极化场的内禀结构

一、一维极化场的形成

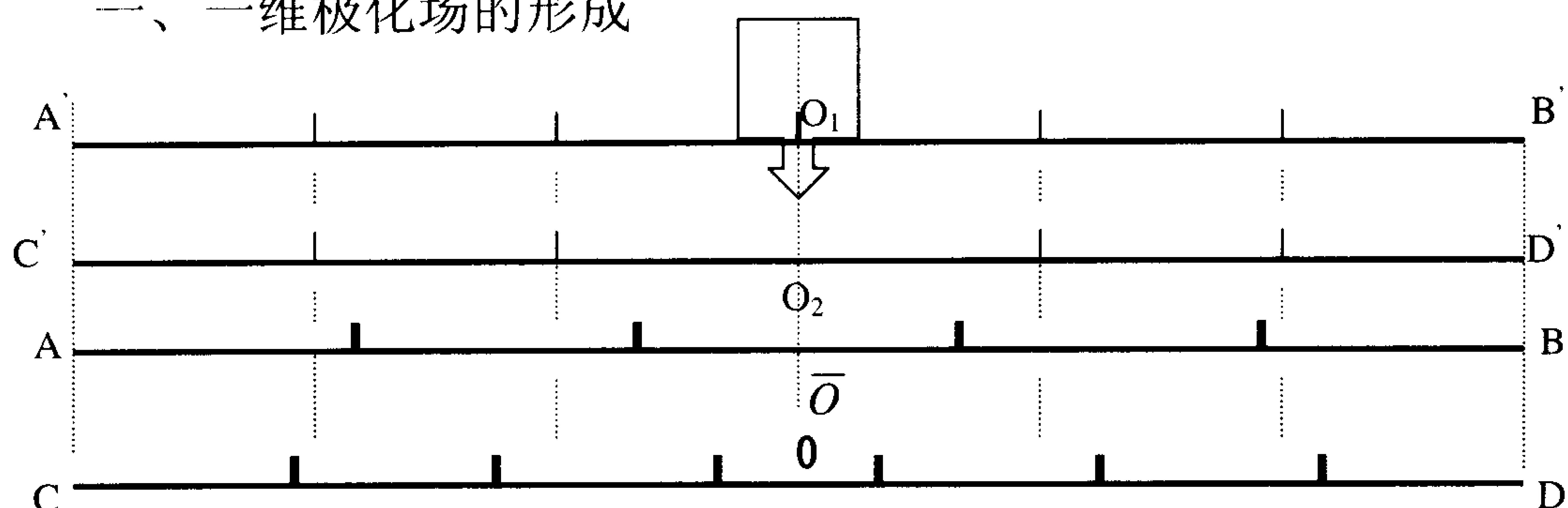


图 4-1　一维极化场形成

我们先来看下一维场流形的情况，如图 4-1 所示，当把一维场流形中的一份场质，强加入另一根一维场流形中，则 AB 一维场流形由于失去一份场质，于是场流形的两边被 $\overline{o}$ 点拉伸，而形成拉伸极化场；在压缩区，由于强加入一份场质时，场流形中的 o 点向两边压缩，形成压缩极化场，若只加入一份基本场质，那么通过这种场的形变就不会破坏中心(以后称极心)区的场的维度特性。拉伸区也同样，在 $\overline{o}$ 区域，场质处于拉伸态，若 ab 点的距离再大，则极心区会达到拉伸极限；在 o 区域，场质则处于压缩态，若 cd 再近，则会达到压缩极限。在极限状态，中心区仍然处于处于一维场流形状态，具有一维特性。

由 A 至 B 称为拉伸极化场的波长，记为 $\lambda_{拉}$，类似于第二章一维波的拉伸区的情况 $A\,\overline{o}\cdot p=H/2$，有 $\lambda_{拉}\cdot p=H$，和拉伸区一样，对于压缩区来说，有 $\lambda_{压}\cdot p=H$ 而

$$\lambda_{拉}=\lambda_{压}=\lambda \tag{4-1}$$

因此，对于拉伸区和压维区均有

$$\lambda\cdot p=H \tag{4-2}$$

和图 2-1e 相类似，我们可以画出 h(x)的图来。

和第二章的情况很相近，我们得到一维极化场的场函数，对于压缩的一维极化场

$$\overline{\varphi}=-e^{ikx} \tag{4-3}$$

拉伸区

$$\varphi=e^{ikx} \tag{4-4}$$

其中　　$k_0 = \frac{\pi}{t_\lambda}$　，$k = \frac{\pi}{\lambda}$

$E = \frac{H}{\pi} k_0$　，$\vec{p} = \frac{H}{\pi} k\vec{n}$

$H/2$ 为极化场极心的最大偏移量。

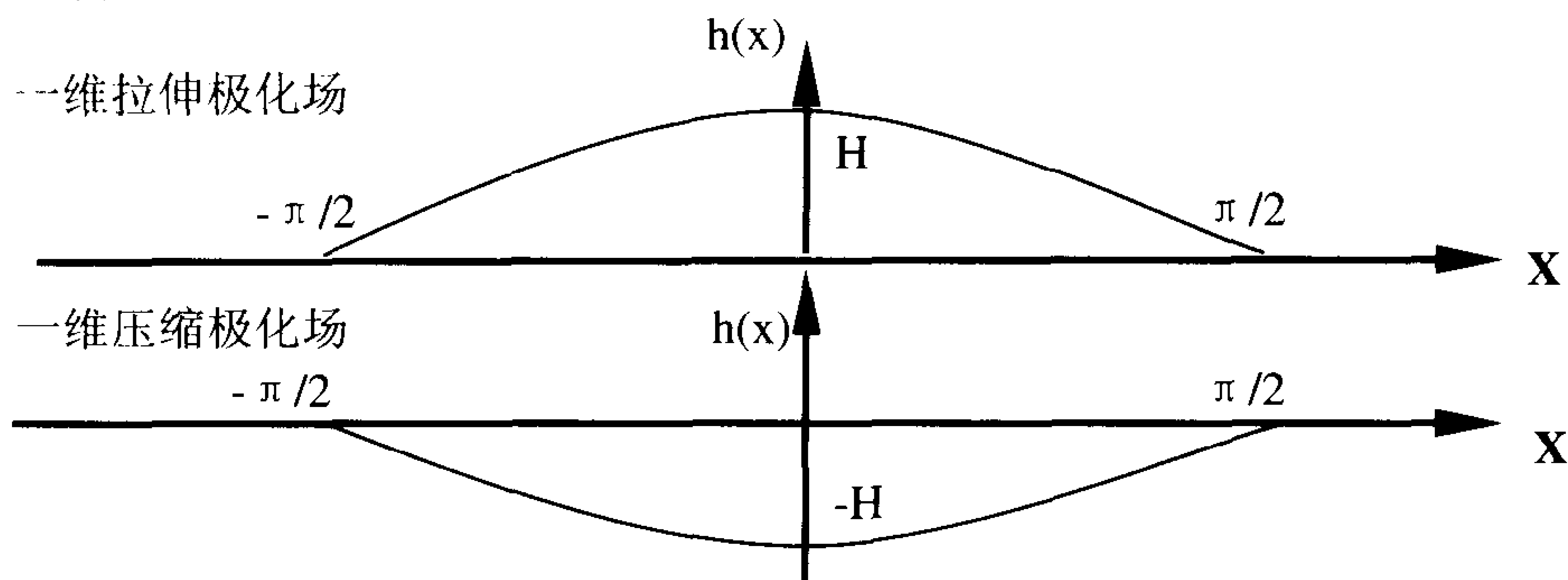


图 4-2　一维极化场的 H

和一维量子波不同的是极化波本身不能传播，因而能量和动量是内禀能量动量，无法传递给其他量子，它的静质量满足爱因斯坦质能关系

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{H}{\pi} k_0 \tag{4-5}$$

简单地了解了一维极化场的情况，我们来研究静态三维极化场的情况。

二、三维极化场的形成

三维极化场是球状场流形，如图 4-3 所示。在图 3-1 所示的三维量子波中，O→O′ 的最大一维偏移量为 H，对于量子波无论波长如何，这个量总是不变的。O 与 O′ 的运动越快，则场流形作出反应的内禀场质的量越小，即作出反应的时间就越短。如果 O 点的运动快到超过某一极限，就会把拉伸区的场质拉出一份基本单元的场质而强加入压缩区，可以形象地说成场流形被击穿，对于拉伸区来说，造成局部场流形缺损，而形成正极化场，而在压缩区则局部多出一份基本场质，而形成反极化场，这样被击穿的量子波使分裂成一对对偶的正反极化场。如图 4-3 所示。

我们可以用一维极化场流形来构造出三维极化场流形，我们取一维极化场流形的一半，在球坐标系中（参见图 3-2）沿 φ 转 2π，然后再沿 θ 转 π，这样便构成一个球体流形，这便是三维极化场流形。对于极化场来说，考虑一维情况：

$$H/2 = \int_0^R (H/2)\cos(\frac{\pi}{\phi} r)dr \tag{4-6}$$

其中：$\Phi = 2R$。

在三维球坐标中，三重积分 $I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta,\varphi)} F(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\varphi dr$，考虑拉伸极化场，半径 $r = r(\theta,\varphi)$ 的应变量是一个函数 $u_r = (H/2)\cos\frac{\pi}{\phi} r$，是球对称的，与 θ,φ

无关，对于三维极化场流形中总的场形变量 h_f 为(角标 f 表示费米子场)

$$h_f=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}2\sin\varphi d\varphi\int_0^{R}u_r{}^2du_r \tag{4-7}$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}2\sin\varphi d\varphi\int_0^{R}[(H/2)\cos\frac{\pi}{\phi}\gamma]^2d[(H/2)\cos\frac{\pi}{\phi}\gamma]$$

我们得到

$$h_f=\frac{4\pi}{3}(H/2)^3 \tag{4-8}$$

式（4-8）的 h_f 就是有静质量费米子的普郎克常数，是一个恒值。这里我们要特别说明的是有静质量费米子的普郎克常数 h_f 和三维量子波的普郎克常数 $\hbar$ 是两个并不完全一致的概念。极化场内禀空间的空间部分的形变量，即三维极化场的内禀能量函数

$$E_f=dh_f/d\Omega_0 \qquad p_f=dh_f/d\Omega$$

其中 $d\Omega=r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$ ， $dh_f=u_r{}^2\sin\varphi du_rd\theta d\varphi$ 得到

$$p_f=\frac{\pi}{\Phi r^2}(\frac{H}{2})^3\cos^2(\frac{\pi}{\Phi}r)\sin(\frac{\pi}{\Phi}r) \tag{4-9a}$$

时间部分(即场质)的形变量，即三维极化场的内禀能量函数

$$E_f=\frac{1}{c^3}\cdot\frac{\pi}{\Phi r^2}(\frac{H}{2})^3\cos^2(\frac{\pi}{\Phi}r)\sin(\frac{\pi}{\Phi}r) \tag{4-9b}$$

这里可以看出来，三维极化场的内禀结构函数为

$$h_f[u(r,t)]=\frac{H}{2}\cos\frac{\pi}{\phi(r,\mathrm{t})}u(r,t). \tag{4-10}$$

对于一维：$H/2=R\cdot p=t_r\cdot e$ ，对于三维流形则有

$$h_f=\frac{4}{3}\pi R_i^3\cdot p^3=\Omega_i\cdot p_f \tag{4-11a}$$

$$=\frac{3}{4}\pi R_0^3\cdot e^3=\Omega_0\cdot E_f \tag{4-11b}$$

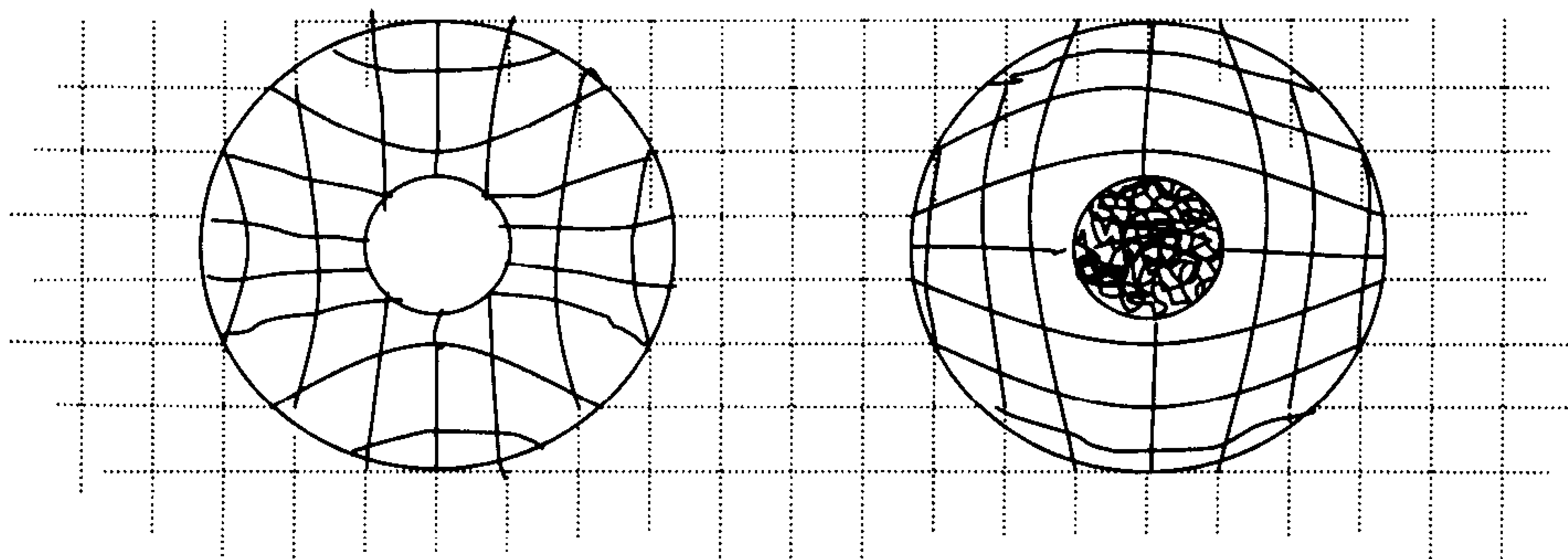


图 4-3 极化场

可以把能量和动量分别说成是三维场流形形变随时间和空间的变化率，这种多化率越大，则能量动量也就越大。对于极场来说，直径越小，则能量动量就越大，内禀能量内动量可以统一地说成是三维极化场的场形变率。内禀流形如图 4-3 所示。

要注意的是对于我们的实验来说，我们只能通过某种粒子或者采用光子与靶粒子间的相互作用来判断靶粒子的静态四动量(静质量和静动量)以及粒子的时空位置。而粒子传递动量总是通过动量量子波来进行的。实验中动量传递只能是从在某一方向进行，不可能确定其靶粒子的体积，因而 h_f 并不具有直接可观测效应。要特别注意的是极化场和量子波不同的是极化场由于有场质得失，因而极化场流形内禀空间的应变是真正意义上的局域时空应变，内禀空间极化场场纤的应变是随内禀空间局域时空应变而形变的，换而言之场纤本身并不存独立的应变，即场纤本身并没有四动量存在。参见第四章第十节 极化场的纤维特性。因而和前面关于量子波的分析不一致，两种流形的应变不同。极化场是内禀时空应变；而量子波则是内禀场纤应变。两者的普郎克关系：极化场满足(4-11)式，即 $h_f=\frac{4}{3}\pi R_i^3\cdot p^3=\Omega_i\cdot p_f=\frac{3}{4}\pi R_0^3\cdot e^3=\Omega_0\cdot E_f$，$E_f$ 为极化场的静态能量，在加速运动时表现出存在静质量 m_0 效应，对于静质量来说引力质量等于惯性质量。对偶极化场湮灭之后，能量形态由极化场形态变为量子波的形态。极化场内禀能量 e^3 表现为静质量，极化场内禀能量在正反极化场相遇而湮灭时，由能量守恒间接测出。当极化场相遇湮灭时，正反两极化场消失变为一对量子波，量子波的能量就是极化场的静态能量 m_0c^2 满足 $E_f=E_b=m_0c^2$ 。量子波则满足(3-10)式，即 $\hbar=RP=R_0E$，只能表述量子波。两个表达式虽然具有相同的物理意义，但并不具有互通性，因为①内禀场流形的结构不同，前者虽然存在场纤，但是是真正意义上的时空应变，而后者内禀场流形具有纯场纤结构；②内禀场流形的形态不同前者，前者是球对称的，内禀场流形没有直接的可观测效应，表现出静质量效应。量子波是非球对称的，表现出波动特性，$h=p\cdot\lambda$ (其中 $2\pi\hbar=h,\pi R=\lambda$) 具有可观测效应，因而式(3-9)具有实在意义。对于量子波来说，能量动量可直接观测的，量子波的能量 $E\cdot\Delta t=\hbar$ 。对于量子波 $\hbar=p\cdot R$ 就有 $\hbar=\lambda\!\!\!^{-}{}_0m_0c$，$\lambda\!\!\!^{-}{}_0$ 就是我们孰知的康普顿波长。在 $\lambda\!\!\!^{-}{}_0$ 并不是极化场内禀空间的半径 R，而是极化波变为量子波之后的 1/2 纵波波长(即量子波的内禀空间半径)，(参见图 3-7)。有趣的是等能量的极化波球体和量子波球体的大小近似相等。因为：$h_f=\frac{4\pi}{3}(H/2)^3$，而 $h_b=\frac{32}{9}(H/2)^3$，有 $\hbar$ ： $\hbar_f$ =1 ∶ 1.109(即 $\hbar_f$ =1.109$\hbar$)，近似相等。

$$\hbar=\lambda\!\!\!^{-}{}_0m_0c=R\cdot m_0c \tag{4-12}$$

这里 $p_F={p_f}^3=m_0c$，$E_F={E_f}^3=m_0c^2$ 。R 表征了实验观测到的费米子的大小，但并非是真正意义上的是极化场内禀空间半径。我们以前所说的普郎克常数就指的是三维量子波的普郎克常数 $\hbar$ 。例如在定性分析 π 介子质量中：按汤川秀树的想法，一个核子放一个虚介子，速度接近光速 C，经过 R 距离后被另一个核子吸收，后者又放出一个虚介子，被第一个核子所吸收，虚介子往返一次，使两个核子彼此吸引。因此，虚介子前后经历的时间 $\Delta t\sim\frac{2R}{c}\sim\frac{2\times10^{-13}\text{厘米}}{3\times10^{10}\text{厘米/秒}}\sim\frac{2}{3}\times10^{-23}$秒，由不确定关系 $\Delta E\cdot\Delta t\sim\hbar$，可知在这个

过程中能量转移 $\Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta t} \sim \frac{6.6\times10^{-16}eV\cdot秒}{2/3\times10^{-23}秒} \sim 10^{8}eV \sim 100$ MeV。用虚介子的静能量来估计这个 ΔE，即 $\Delta E \sim m_{\pi}c^{2}$。由电子质量 $\Delta E = m_{e}c^{2} = 0.51$ MeV 可知介子的质量约为电子质量的 200 倍。

第二节　三维极化场的场函数

我们可以把平直空间映射为一个封闭的球体流形，这个流形我们可以理解为一个压缩的极化场，先看二维流形的情况如图 4-4。采用保角变换方式系处理

$$\varphi + i\psi = \frac{i}{2\pi}\log z$$

$$t = \log z$$

将上式反演，则可得

$$e^{t} = z \quad 或 \quad e^{u}\cos v = x, 及 e^{u}\sin v = y$$

由此有 $\sqrt{x^{2}+y^{2}} = e^{u}$　　并有，$\tan^{-1}(\frac{y}{x}) = v$

可以把二维面映射为极化二维场，现在我们把问题推演至三维映射，而成为三维极化场流形。类似于二维情况，我们有：

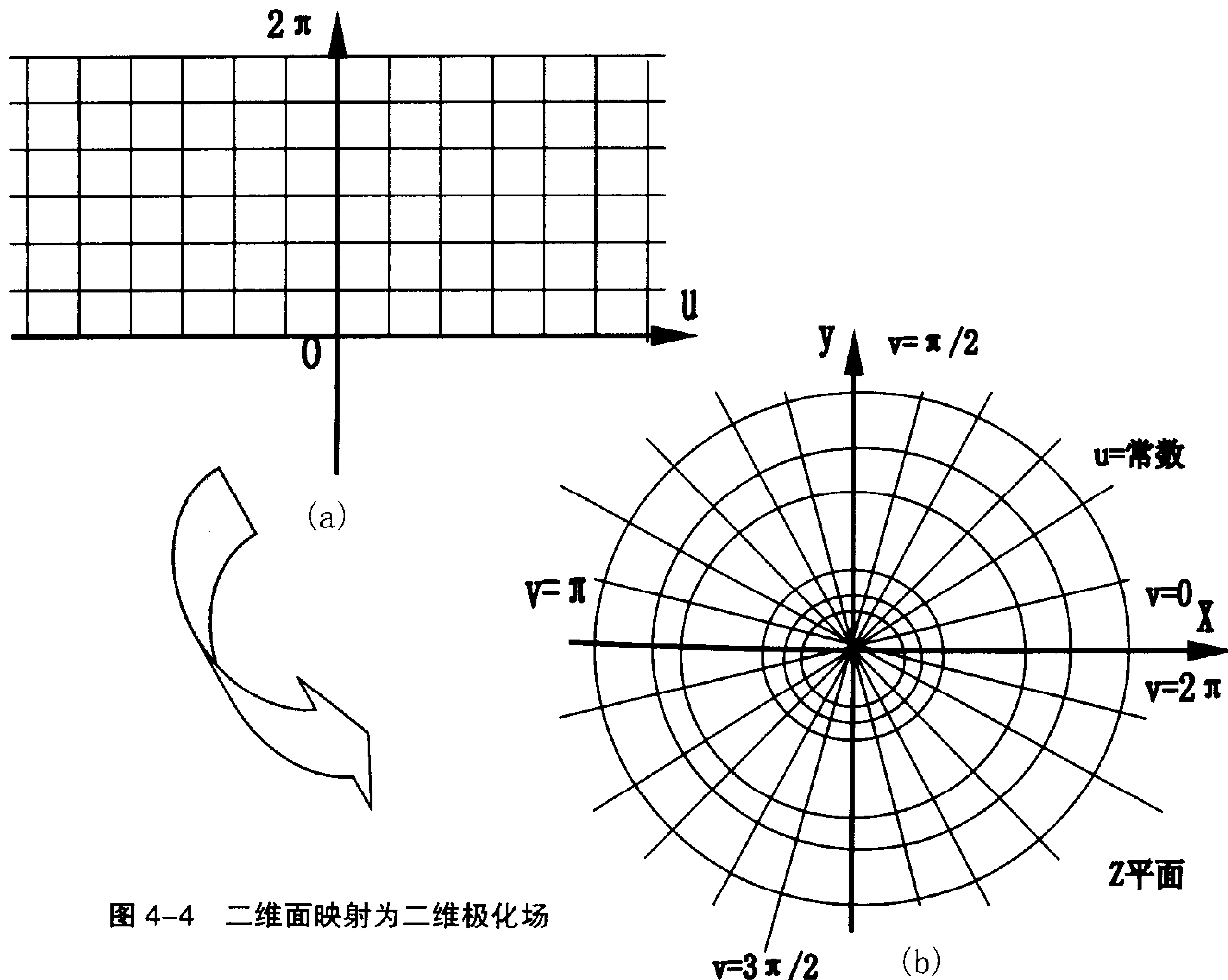


图 4-4　二维面映射为二维极化场

$$\begin{cases} e^{u}R\cos v\sin\vartheta = x' \\ e^{u}R\sin\vartheta\sin v = y' \\ e^{u}R\cos\vartheta = z' \end{cases} \quad (4\text{-}13)$$

有

$$\sqrt{x' + y' + z'} = e^{u}R \quad (4\text{-}14)$$

对于平直空间的球极坐标

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos v \\ y = R\sin\theta\sin v \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

即

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \quad (4\text{-}15)$$

式（4-14）和式（4-15）两者相差e^{u}称为势，所以势所对应的是时空形变的量，沿$\vec{r}$方向(0<r≤R)，所以可以写为$e^{u\vec{r}}$，虽然我们并不知道u的具体值，但可以从一维极化场中知道，一维极化场的场函数$\varphi=e^{ikx}$，k为二维波矢，当一维场流形以o点为圆心在空间沿θ,φ分别转动2π和π时，就构成了三维极化场。由此，我们知道u便是四维波矢。三维极化场的场函数为

$$\Psi = e^{ikr} \qquad 0 < r \leqslant R \quad (4\text{-}16)$$

其中　$k_0 = \dfrac{\pi}{t_\lambda}$，$k = \dfrac{\pi}{\lambda}$；　$E = \dfrac{h_f}{\pi}\cdot k_0$，$\vec{p} = \dfrac{h_f}{\pi}k\vec{n}$　　（$p_f = p^3$，　$E_f = e^3$）

$$h_f = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot p = \lambda \cdot p = t_v E \quad (4\text{-}17)$$

t_v是体积为$\dfrac{4}{3}\pi R^3$内，形变的场流形的量，即$\dfrac{4}{3}\pi R^3$内的场质的量，$\lambda = \dfrac{4}{3}\pi R^3$。

对于多量子系统①②③……即n个粒子构成粒子体系 $E=\sum_{i=1}^{m} E_i$，$P=\sum_{i=1}^{n} p_i$ 最后用能量密度进行积分。

第三节　极化场的内禀协变场流形

三维极化场的三维场流形形变是限制在内禀球壳以内的，即在半径R以内的范围，在R以外,三维场流形仍然保持平直，对时空几乎没有任何影响(注：这种微乎其微的场流形形变产生的力场就是引力场，这里我们不考虑)。但是如果我们能和“时钟”一起变得足够小，以致于小到和一个三维极化场相比，我们都显得很渺小，这样我们便能进入到三维极化场的内禀时空中，这个时空仍然是三维场流形区间，因而在这个半径为R球壳内的流形是平滑的局域协变流形，在这个内禀时空中，由于场流形的形变，使波的传播速率降低，而使“时钟”变慢。场流形的形变使极化场流形分布不均匀而出现一个力场，这个力场被

封闭在球壳内。这个力场就是弱力场，显然这个力场很短。

由于是协变流形，在 R 内是静止球对称场，内禀时空可以用度规来表述。静止条件意味着采用静止坐标系时，空间坐标可以取球极坐标 $x^1=r$，$x^2=\theta$，$x^3=\Phi$

满足球对称的 ds^2 的最普遍的形式为：

$$ds^2 = Udt^2 - Vdr^2 - Wr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) \tag{4-18}$$

式中 U,V,W 只是 r 的函数，我们可以用任何一个 r 的函数来代替 r，而不会影响球对称性。因此可利用这一点尽可能地使问题简化，最方便的是令 $W=1$，那么 ds^2 表式可写为

$$ds^2 = Udt^2 - Vdr^2 - r^2d\theta^2 - \sin^2\theta d\Phi^2$$

令 $U=u^2(r)$，$V=v^2(r)$

$$ds^2 = u^2(r)dt^2 - v^2(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - \sin^2\theta d\Phi^2 \tag{4-19}$$

而对于无形变的平直空间来说

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - \sin^2\theta d\Phi^2 \tag{4-20}$$

由(4-19)和(4-20)相比较可知，$u(r)$ 是时间维度的变化函数，而 $v(r)$ 则是空间的变化函数。由（4-16）式我们知道，时空沿 $\bar{r}$ 以 e^{iRr} 方式变化，所以有

$$u(r) = e^{ik_0t}，\quad v(r) = e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

而 $k_0t = \dfrac{\pi}{t_\lambda}\cdot t = \dfrac{\pi}{ct_\lambda}\cdot ct = \bar{k}\cdot\bar{r}$

所以 $u(r) = e^{i\bar{k}\bar{r}}$，式（4-19）可写为

$$ds^2 = e^{2i\bar{k}\bar{r}}dt^2 - e^{-2i\bar{k}\bar{r}}dr^2 - r^2d\vartheta^2 - r^2d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta d\Phi^2 \tag{4-21}$$

显然上式对 r 没有限制，因而不能完整表达在球壳以外场流形为平直的情况，于是我们引入 $\theta(R-r)$ 函数，当 $r\geqslant R$ 时，其值为零(当 $r\geqslant R$ 的区域为引力场区域，在后面一节我们会考虑，由于太小，视为零)；当 $r\leqslant R$ 时，其值为 1。由图 4-1 中一维极化场的情况，我们知道当 r 为零时，极心区场质达到拉伸压缩极限，极点的场流形无法再形变，而形成一个无弹性的点。式（4-21）重写为

$$ds^2 = e^{zi\bar{k}(R-r)\theta(R-r)}dt^2 - e^{-2i\bar{k}(R-r)\theta(R-r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\Phi^2 \tag{4-22}$$

其中：$r\geqslant 0$

$$\theta(R-r) = \begin{cases} 1 & R-r>0 \\ 0 & R-r\leq 0 \end{cases}$$

极化场中，我们可以把压缩极化场称为反极化场，而把拉伸场称为正极化场，正极化场和反极化场的表述形是完全一致的，只是把时空量上加以反时空的标记。反时间记为 $\bar{t}$，反空间记为 $\bar{x}$。由(4-22)和广义相对论的相对论的相关章节我们知道在球壳内时钟会变慢：

$$\Delta T = \exp[ik(R-r)\theta(R-r)]\cdot\Delta t$$

取实数部分

$$\Delta T = \cos k(R-a)\Delta t \tag{4-23}$$

其中：
$$K = \frac{x}{\Phi} \tag{4-23a}$$

Φ 为球壳直径，T 为球壳内时间，t 为球壳外时间，这里要注意 T 和 t 均为背景时间而非内禀时间，内禀时间就是极化场球壳内场质的量，关于这点我们还要再论述一下，由(4-23)式知，在极心区时间最慢，在 O 点处，背景时间被冻结，这一个点对于极化场的传播至关重要，也是构成静质量的关健所在(在本章第七节质量本质有进一步论述)。作为一个极化场而言，极心仅为一点，所以量子波灵点可以在极化场中传播，由于场流形的形变使得传播能力降低，因而灵点传播速率变慢，对于正反极子来说时间的性质是一样的，都会变慢。这里，极化场类似于一个微小的小黑洞。在了解完极化场之后，我们会知道对于任何费米子来说都是极化的局域协变流形，因而可以解释为什么光在水中传播速率变慢。

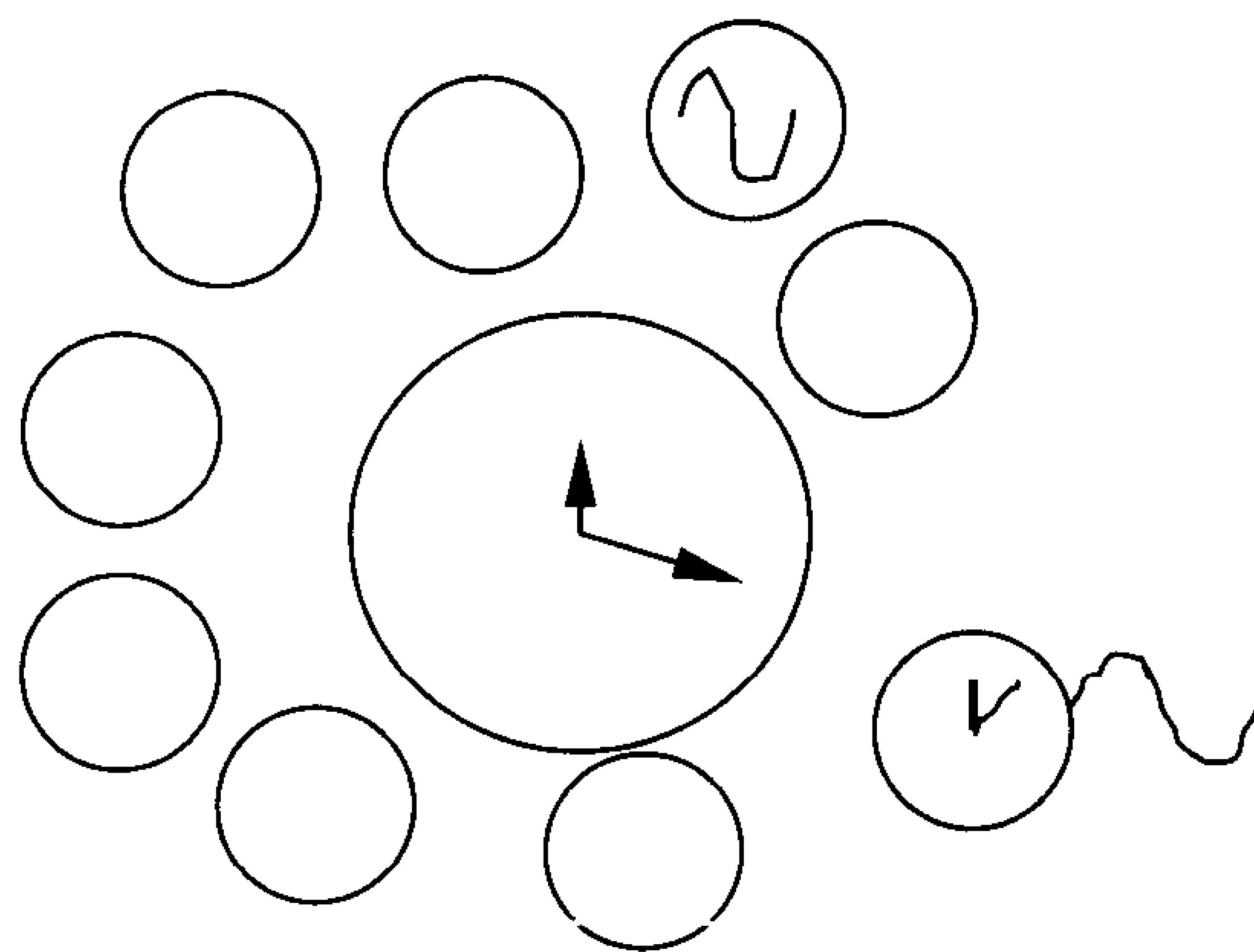


图 4-5　极化场时间

$$v = \cos k(R-a)\cdot c \tag{4-24}$$

虽然我们能构造出极化场的内禀空间，但遗憾的是我们不可能进入到极化场空间内部，所以极化空间虽然能使内部时钟变慢，但却不能使极化场内禀空间外部时钟变慢，如图 4-5 所示。我们可以做一个很简明的假想实验，把手表放入水中，手表不变慢，但若把手表放入强引力场中，光速变慢，手表也会变慢。

第四节　极化场的背景场流形

一、极化场的引力

正极化场向极心压缩，而反极化向极心拉伸。任何场形变都要以波的形式存在，这是场流形的基本性质，根本不存在绝对的静态极化场，因而真实的极化场是向极心传播的极化波。而如果球面极化波精确地传播到极心就会发生反射而形成向外传播的球面波而使极化场消失。但由于场质的得质，使得极心对于正极化场多出一份场质，而反极化场则少一份场质，极化场不可能消失，因而不允许球面极化波向外传播。于是极化场只能以偏心传播的方式进行传播，只有这样才能形成稳定的极化波而构成稳定的极化场。当然为了分析方便，这种极化波可以视为静态极化场和自旋波的耦合(参见第四章第六节)。这种向极心传播的动态特性使得背景流形发生一个小的应变，这个小的应变造成背景场流形弯曲。这种弯曲的量和极化场的内禀四动量相关，内禀四动量越大，造成的背景形变就越严重。

三维静态极化场对背景场流形的影响是球对称的，静止条件意味着采用静止坐标系时，$g_{\mu\nu}$ 与时间 x^0(即 t)无关，同样有 $g_{0m}=0$，空间坐标取球极坐标 $x^1=r,\ x^2=\theta, x^3=\Phi$，满足球对称的 ds^2 的最普遍形式为：

$$ds^2 = Udt^2 - Vdr^2 - Wr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)$$

和前一节一样，式中 U,V,W 只是 r 的函数，所以我们可以用任何一个 r 的函数来代替 r，而不会影响球对称性。于是可以使问题简化，令 $W=1$，那末 ds^2 表式可写为

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\Phi^2 \tag{4-25}$$

我们可以从（4-25）得到 $g_{\mu\nu}$ 的值，即

$$g_{00} = e^{2\nu}，g_{11} = -e^{2\lambda}，g_{22} = -r^2，g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

以及

$$g_{\mu\nu}=0，当\ \mu \neq \nu\ 时$$

我们求得

$$g^{00} = e^{-2\nu}, g^{11} = -e^{-2\lambda}, g^{22} = -r^{-2}, g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta$$

以及

$$g_{\mu\nu}=0，当\ \mu \neq \nu\ 时$$

现在必须计算所有克里斯托菲记号 $\Gamma^{\sigma}_{u\nu}$，其中许多分量都等于零，用撇号表示对 r 的微分，不等于零的克里斯托菲符号如下：

$$\Gamma^1_{00} = \nu' e^{2\nu-2\lambda}，\Gamma^0_{10} = \nu'，\Gamma^1_{11} = \lambda'，\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = r^{-1}$$

$$\Gamma^1_{22} = -re^{-2\lambda}，\Gamma^3_{23} = \cot\theta，\Gamma^1_{33} = -r\sin^2 \theta e^{-2\lambda}，\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta .$$

把这些表达式代入(1-118)式 ，结果为

$$R_{00} = (-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r})e^{2\nu-2\lambda}, \tag{4-26}$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}, \tag{4-27}$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1, \tag{4-28}$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta .$$

$R_{\mu\nu}$ 的其他分量等于零。真空中(发生感知协变)的爱因斯坦方程是

$$R_{\mu\nu} = 0$$

(4-26) 和(4-27)等于零，导致

$$\lambda' + \nu' = 0$$

当 r 值很大时，空间必定趋近于平直空间，故当 $r \to \infty$ 时，λ 和 ν 都趋于零。由此得出: $\lambda + \nu = 0$, (4-28) 式等于零给出

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1$$

即

$$(re^{2\nu})' = 1$$

$$re^{2\nu} = r - 2m_0$$

式中 m_0 为积分常数。上式也使得(4-26) 和(4-27) 等于零。内禀四动量函数在 $r<R$ 时是一个变数，取 0~ R 的平均值时为四动量，在 R 以外（ $r > R$ ），因四动量函数被限制在 $r < R$ 的区间内，四动量被视为一个整体来看，所以当 $r > R$ 时，四动量与 r 无关，相对于 r 是一个常量

$$g_{00} = e^{2\nu} = 1 - \frac{2m_0}{r} \tag{4-29}$$

g_{00} 就是场流形场质(即时间)的形变函数，即势。而这种形变正是极化场内禀四动量对

背景场流形作用产生的，m_0就是内禀四动量的观测值，由相对论质能关系可知观测量m_0和内禀能量的关系为

$$E_f = m_0 c^2 \tag{4-30a}$$

$$u_r = (H/2)\cos\frac{\pi}{\phi}r$$

$$h_f = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} 2\sin\varphi d\varphi \int_0^{R} u_r^{\,2} du_r \tag{4-31}$$

$$= \frac{4\pi}{3}(H/2)^3$$

$$E_f \ = \ dh_f / d\Omega_0 \tag{4-30b}$$

$\overline{E}_f$就是E_f在r_0~R_0取平均：$\overline{E}_f = (H/2R)^3$，则

$$m_0 = \overline{E}_f(0)/c^2 \tag{4-32}$$

完全解：

$$ds^2 = (1-\frac{2m_0}{r})dt^2 - (1-\frac{2m_0}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\Phi^2 \tag{4-33}$$

这就是我们熟知的史瓦西解，在这里c^2是一个很大的量，虽然R也很小，但相比$m_0 << r$（$r \geqslant R$）。

对于极化场来说，$r \leqslant R$，为内禀空间，是局域的协变流形，内禀空间为三维场流形，保持三维特性，内禀区间的时空性质由（4-22）式表述。当$r \geqslant R$时，为极化场背景流形，是协变流形，为三维光滑场流形。一个极化场静质量是非常微小的，对背景流形的影响是非常微弱的，所以近似于平直流形，其时空性质由（4-33）式表述。正是由于这种非常微弱的背景流形应变构成了我们熟知的万有引力场。

二、三维极化场的内禀力场

三维极化场的内禀场流形是球对称应变，因而由（1-14）知

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{H}{2}\cos\frac{\pi}{\Phi}r \tag{4-34}$$

r方向的g_r为

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = g_r = -\frac{H}{2}\cdot\frac{\pi}{\phi}\sin\frac{\pi}{\phi}r \tag{4-35}$$

沿θ和φ方向

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \tag{4-36}$$

$$g_\theta = g_\varphi = \frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial_\theta} = \frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial_\varphi} = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{u_r}{r} \tag{4-37}$$

当r为定值时，$u_r / r = const$，所以当r一定，沿θ,φ方向就无力场存在

$$g_\theta = g_\varphi = 0 \tag{4-38}$$

值得一提的是这里所谈及的三维极化场的内禀力场是从经典力学概念引伸而来的，实际粒子相互作用内禀力场和我们所熟知的力场概念完全不同。当是两极化场相互作用时，并不是像宏观力场作用是通过力场来进行相互作用的，两极化场是通过两极化场间的一维场流形通道来进行相互作用的。内禀力场所起的作用是诱导了作用通道的形成，力场的本身对极化场极点不直接起作用。在后面我们了解了耦合常数的本质后，这个问题就十分清楚了。

第五节　半向空间概念

前面，我们说过时间是一种通过相对运动而比较出的一种动态的场流形的量。现在我们以三维量子波在场流形中的传播作为一种基准，我们便可以在同一场流形区域中校准我们的时钟。对于场流形来说，只要发生形变，就会影响传播能力，使传播速率下降，因而在拉伸场流形和压缩场流形区域中，时钟都会变慢，从这种意义上说，存在一个最平直无形变的场流形区域中，那里的时间最快。

现在我们来看物理学中的空间。和抽象的数学空间不一样，物理学空间是以场流形为物质基础的。如果是平直的场流形则没有可观测效应，而只有在场流形形变以后，才存在力场，也才存在物质，这时空间才有意义。为了区别两种不同形式的场形变，可以定义压缩场流形的空间为反，而拉伸场流形为正(当然也可以采用相反的定义)。在物理时空中，正反时空是和压缩拉伸场流形对应的，物理时空的正负也是有物质基础的。而拉伸场流形和压缩场流形总是以对偶的形式出现的，这一事实所对应的便是空间、时间具有对称性。所以我们也可以说时空对称性来自于场流形应变的对称性，这便是时空对称性的物质本质。当然时空也会发生不对称，这是由半空间所造成的。

完备的三维物理空间存在对偶压缩拉伸区，若场流形处于平直状态，那么这种对偶空间依然存在,仅是形变量为零而已，在这样的场流形中，我们建立一个完备的坐标空间，在这样的空间中,任意一个完备的坐标空间，在这样的空间中，任意一个矢量转180°以后，则达到与原来相反的指向，如图 4-6a 所示。

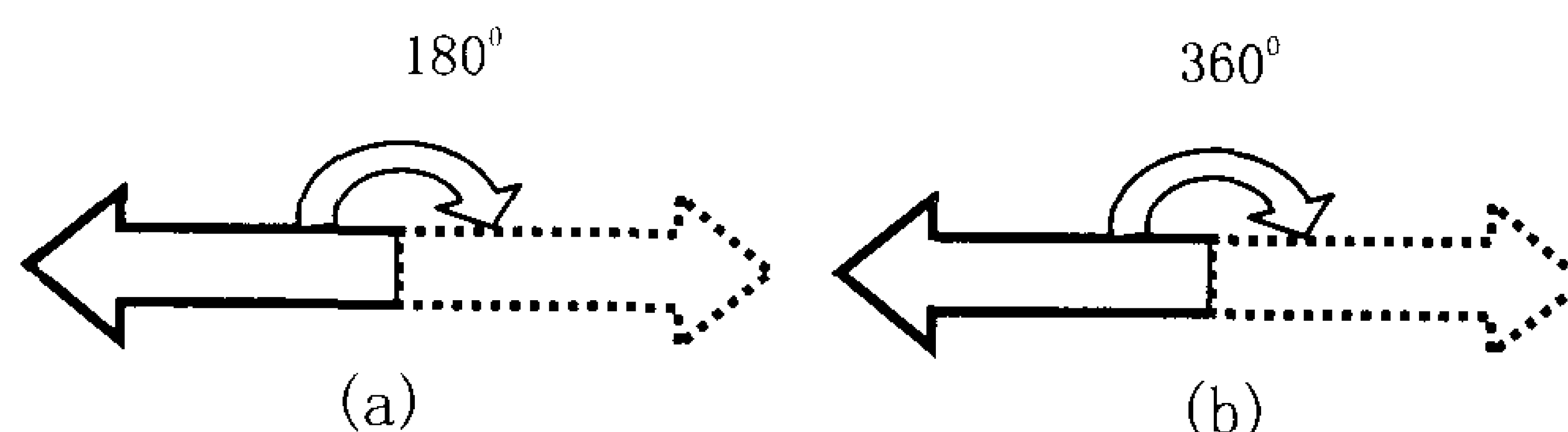


图 4-6　半向空间和全向空间

当产生一对极化场后（一对费米子），反的极化场流形为压缩场流形而无拉伸场存在，而正费米子(正极化场)则仅有拉伸场流形存在而无压缩场流形。在局域协变流形中，空间的维度并没有改变，于是物理空间发生分裂，一个完备的空间分裂为两个独立的空间，分别为正空间和反空间，如图 4-7A 所示。

这种分裂后的空间是一种非常奇特的空间，所有的维度依然保持原来的特性，但方向却仅有原来的一半，称为半向空间，在半向空间中，一个矢量转动360°时，仅相当于全空间转动180°，在极化场的内禀协变流形正是半空间。

我们用 Φ 表述全向空间场流形，其四维物理时空是对称的，具有对称性。而在极化场中，空间变为半向空间时空，为了区别全向空间的度规张量，我们把半空间的度规的以标

记，记正向半空间为$\Phi]$

$$\Phi] = \hat{P}_{半}\Phi \tag{4-39}$$

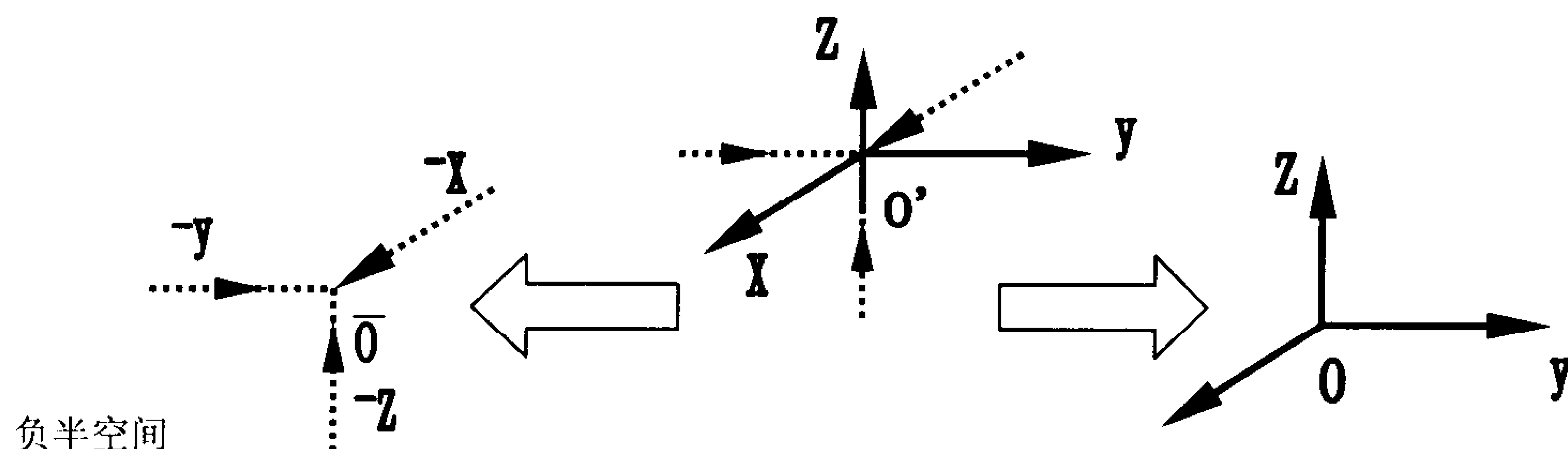


图 4-7A　半向空间的形成

$\hat{P}_{半}$ 为正半向空间算符,该算符作用到全向空间上，则分离出正半向空间。记反半向空间为

$$[\overline{\Phi} = \hat{\overline{P}}_{半}\Phi \tag{4-40}$$

$\hat{\overline{P}}_{半}$ 为反半向空间算符。两个半向空间相加，便得到一个全向空间，即普通空间。

$$[\overline{\Phi} + \Phi] = \Phi \tag{4-41}$$

现在我们从应变的角度来研究一下半空间性质，在拉伸极化场Ω内，任一在本单元

$$\varepsilon_i \geqslant 0, \qquad i=1, 2, 3 \tag{4-42}$$

为拉伸半空间，而在压缩极化场$\overline{\Omega}$内，

$$\varepsilon_i \leqslant 0, \qquad i=1, 2, 3 \tag{4-43}$$

为压缩半空间。

上述谈到的半空间是一种很单纯而理想的半空间概念，而实际的情况或许有所不同。应该存在这种情况:在图 4-7A 中空间的分离不可能如此彻底，如图 4-7B 所示， 设拉伸场流形为正半空间，压缩场流形为负半空间。在(b)中拉伸形变的量比压缩形变的量要大，则(b)倾向于正正半空间；而在(a)中压缩形变的量比拉伸形变量要大，则倾向于表现为负半空间。具体表述为：拉伸应变在x正方向为ε_x，y和z的正方向则为ε_y，ε_z；压缩应变在x负方向为ε_{-x}，$-y$和$-z$的正方向则为ε_{-y}，ε_{-z}。

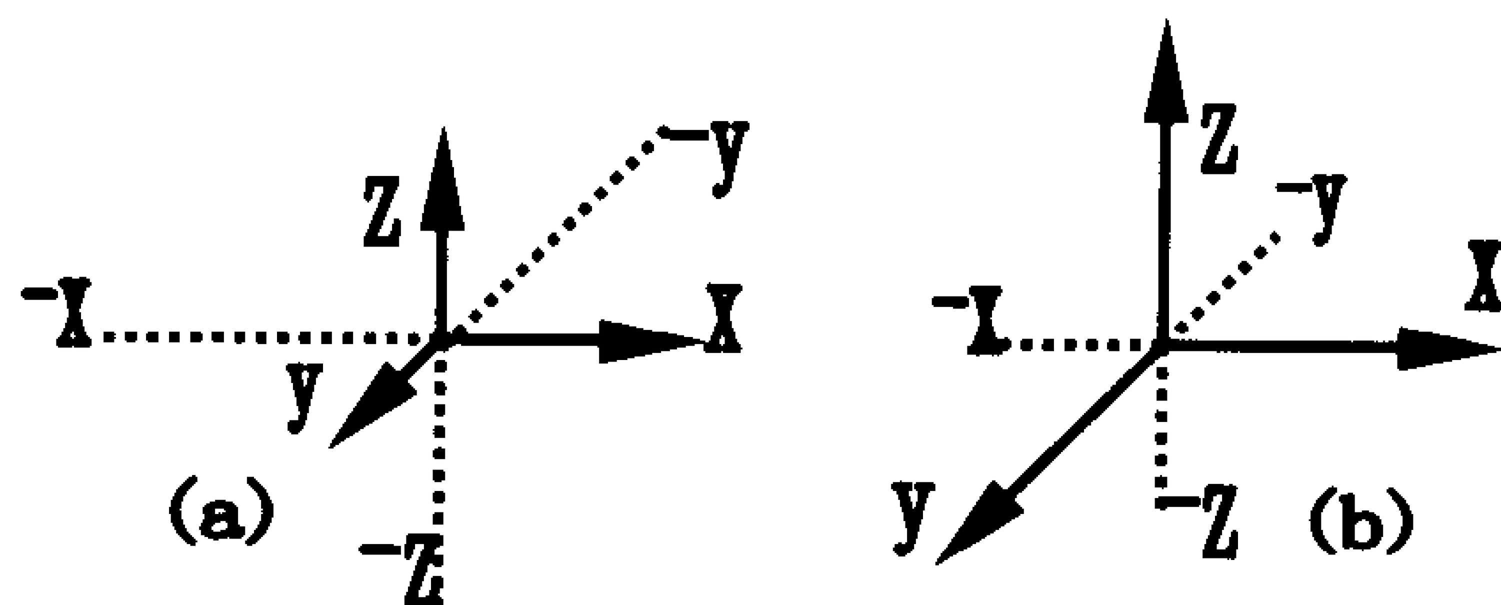


图 4-7B　非理想半向空间

负半空间 $\left.\begin{array}{l}\varepsilon_x - \varepsilon_{-x} < 0 \\ \varepsilon_y - \varepsilon_{-y} < 0 \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{-z} < 0\end{array}\right\}$ (4-44a)　　正半空间 $\left.\begin{array}{l}\varepsilon_x - \varepsilon_{-x} > 0 \\ \varepsilon_y - \varepsilon_{-y} > 0 \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{-z} > 0\end{array}\right\}$ (4-44b)

满足上式(4-44a)中条件的为负半空间，满足式(4-44b)条件则为正半空间。为了简化，我们令

$$\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{-i} \ . \qquad (i = x, y, z) \tag{4-45}$$

对于两个局域半空间场流形相互作用时，整体半空间对宇称的破坏性就表现出来。那

么这种半空间性的强烈与否还要看相互作用场流形的作用区的形变量。相互作用区的场应变 ε_I 的绝对值 $|\varepsilon_I|$ 若小于 $|\Delta\varepsilon_i|$，则半空间性就完全表现出来；若 $|\varepsilon_I|>|\Delta\varepsilon_i|$，则半空间特性表现就很弱；若 $|\varepsilon_I|>>|\Delta\varepsilon_i|$，则完全没有半空间性。

要注意的是在半空间内部某一小局域，如果场流形畸变，而这种应变满足 $\varepsilon_i\equiv\varepsilon_{-i}$，那么在半空间内部，我们所感知的空间依然是全空间，即宇称对称。所以半空间性是一种整体流形所表现出来的特性，具有整体性。

第六节　自旋本质

一、自旋波的内禀结构

我们先来考虑无静质量极化场的自旋情况，在前面所研究的无静质量极化场并没有考虑自旋问题，而实际上作为一种场形变总要以波的形式进行传播。因而无自旋极化场流形是不稳定的，只有形成自旋波才符合场流形的特性，在极化场的 R 以外，场流形无形变，因此无波可言。自旋波被封闭在半径为 R 的球壳以内，因此自旋在内禀空间中，为内禀特性。

当极化场产生的瞬间，由于压缩极化场向极心压缩场质，而拉伸场则向极心拉伸场质。于是对于压缩极化场内禀空间中的场流形向中心区产生形变，便形成一个向中心传播的波，并压缩极心，所有的波不可能精确地汇于中心点，如图 4-8 所示，而出现偏心，于是动量波就以汇聚点为灵点，形成三维量子波，沿半径为 r 的圆环形成自旋极化波，并永不停息地传播。对于拉伸极化场的三维自旋波灵点则由极心区向外传播，形成一个源。所形成的波动场很象一个漩涡场，由于极化场的极心对于压缩场为高密度场质，而对于拉伸场则为很稀疏的场质，这种极化场极心的场质疏密使得自旋波永是有一种向极心传播或由极心向外传播的趋势，自旋波灵点永远不可能离开极心区。

就自旋波而言，自旋波向内，则在传播面上形成二维压缩极化场。拉伸极化场形成时的情况正好相反，自旋波由极心向外传播，在传播面上形成二维拉伸极化场。

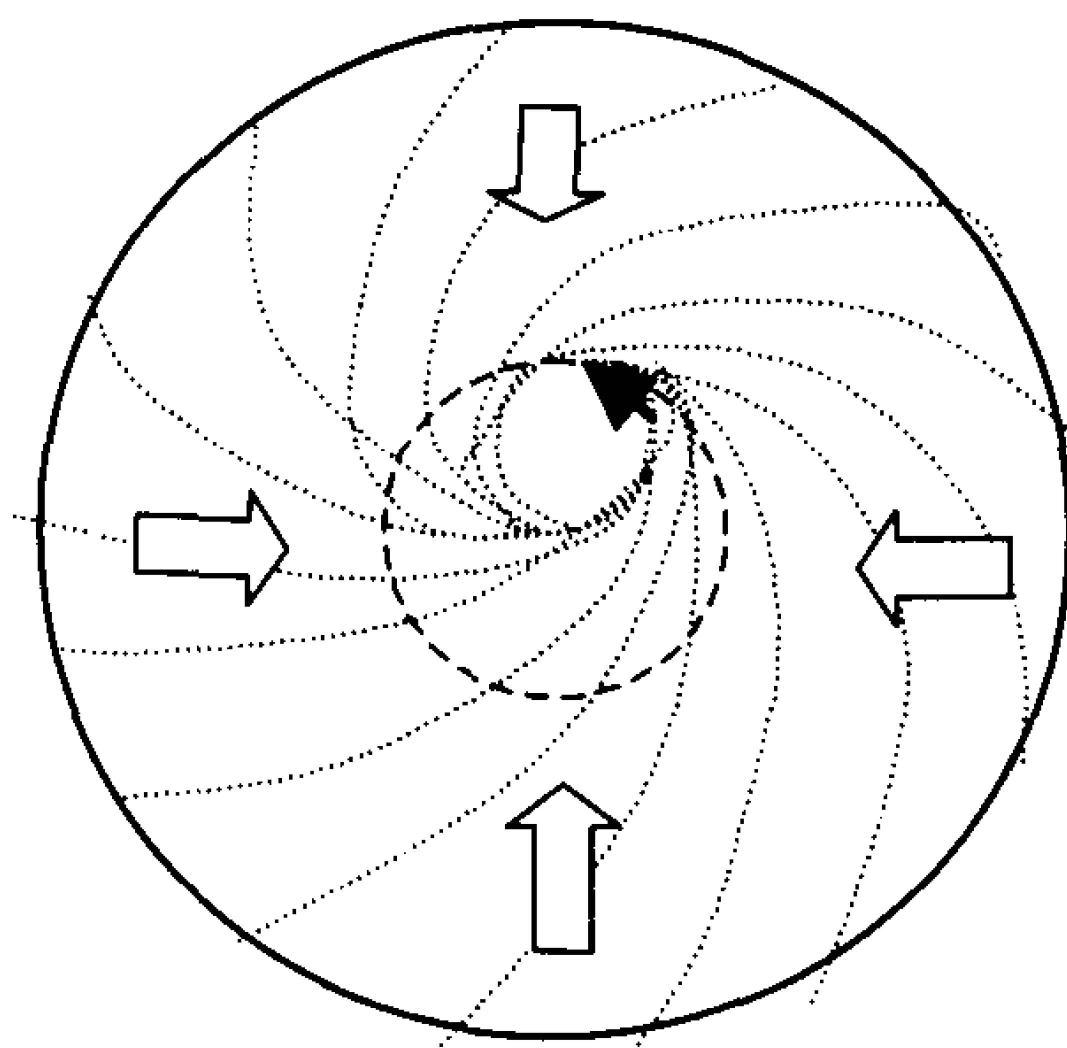


图 4-8　自旋波

对于自旋极化场显然是一个复杂的场流形，但我们可以把问题分开来进行考虑。首先由于场流形的得失，使得极化场形成一个局域的协变流形，其次在协变流形中，存在一个绕极心以 r 为半径的圆环进行传播的三维极化波，r 很接近极心。由于内禀场流形的存在，时空都强烈地弯曲，所以时间变慢，三维极化波在极心附近传播的速度满足（4-24）式，这里要特别提醒注意的是极化场内禀空间为局域协变流形的本身相对于自旋波是静止的，波是在局域协变流形中进行传播的。

在前面，我们已经知道三维量子波的情况，现在我们来想象三维量子波在极化场内禀空间中，由于极极化场极心存在场质得失，三维量子波不是沿直线传播，而是在极化场内禀空间中绕极心上的 z 轴转动传播。设 r 为自旋波灵点转动传播的平均半径，$r<R,r\geqslant$

0，O 为极心区极化场的中心，自旋波是三维量子波，横波的波长 $\lambda = 2\pi r$ 时，是三维量子波的低能稳定态。因而自旋波满足

$$2\pi r \times P = h \tag{4-46}$$

有

$$r \times p = \frac{h}{2\pi} = \hbar \tag{4-47}$$

为自旋角动量，但由于半空间效应，量子波靠极心的一半没有可观测效应，因而对于我们的实验来说自旋角动量 S 为

$$S = \frac{1}{2}\hbar \tag{4-48}$$

图 4-9 中，我们把图 4-8 中的中心部分加以放大和简化，波动为一个周期的驻波，我们可以看出量子波沿半径为 r 的轨道波动传播，量子波的灵点轨道如图中虚线所示。

虽然，我们不可能进入内禀空间极心由里向外进行观测，只能出外向内进行观测。因而灵点的外侧是可观测的，而靠极心的内侧，由里至外则是不可观测的。这样极化场半空间就把自旋量子波的一半封闭在极心区中，而无法观测，因而我们便认定自旋角动量只有 $\frac{1}{2}\hbar$。

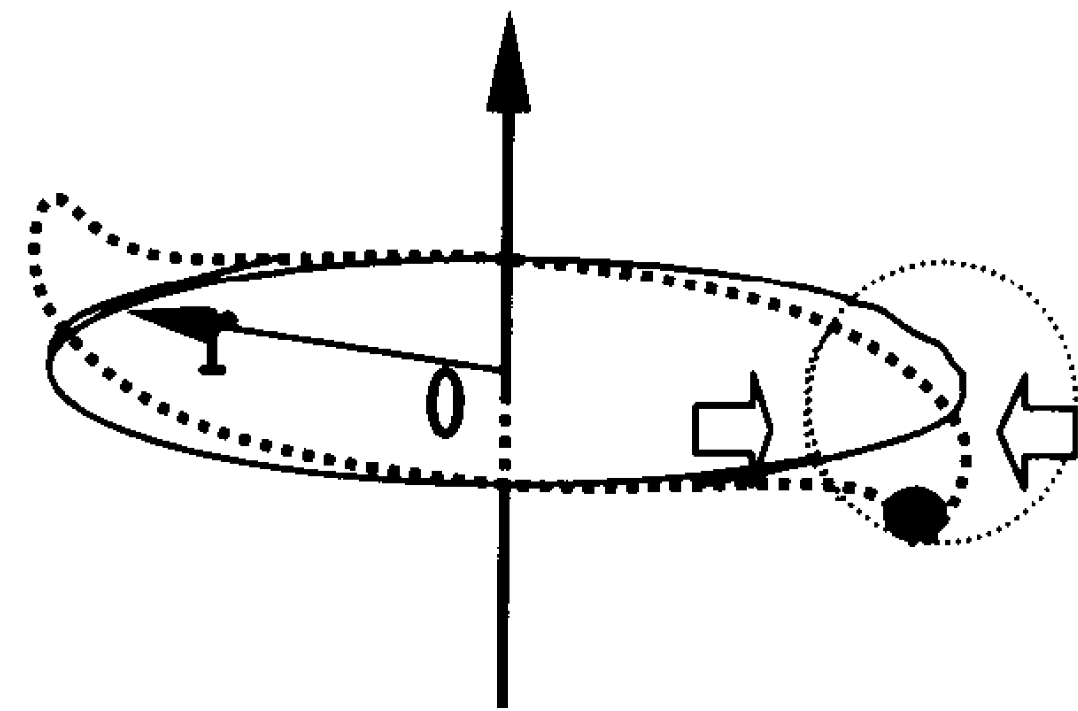


图 4-9 自旋波的驻波

现在我们来简单地看一下自旋极化场的内禀动量分布。我们先来考察一个三维场流形中的单维度矢量的情况。设单维度向量为 $\vec{r}$，那么当 $r = R$ 时，对于静态极化场 $R_{极} \cdot p_{极} = H/2$（H 为一维普朗克常数)，在量子波动的运动方向上灵点所在的维度上(纵波)，有 $R \cdot p = H/2$。在量子波进入极化场内禀空间之后，对于圆环上的点来说，$\vec{P} = \vec{P}_{极} + \vec{P}_{波}$($\vec{P}_{极}$一维极化场动量，$\vec{P}_{波}$一维量子波动量)，而在 z 轴上，没有三维级化波存在，因而动量最小，为 $\vec{P} = \vec{P}_{极}$，由此可以看出动量分布在 xy 面上最大，而在 z 方向最小。场流形是弹性流形，若场应变越小，使之再形变就越容易。处于自由状态的场流形发生形变是最容易，显然对于自旋极化场来说沿 z 轴是场形变量最小的方向，所以极化自旋场若还要发生场形变则总是沿 z 轴(自旋转轴)方向。

二、三维极化场的半向空间效应

本来在全空间中自旋应该有四种指向，向内和向外；向左和向右(即三维化场自旋波存在四种自由度：自旋波向内或向外；自旋波向左或向右)。但由于半空间效应，全空间分离为正半空间和反半空间，由四种自由度减为两种自由度，这奇特的半空间效应使得我们所熟知的全空间中宇称对称性遭到破坏。对于半向空间的极化场而言，只有两个自由度，即自旋波左旋向内(半空间反极化场则右旋向外)。半空间对称性在极化场中遭到破坏，自旋的左右对称性也失去了全空间通常的意义。极化场是半空间，对于半空间来说分为正半空间和反半空间，分别对应正极化场反极化场。正极化场自旋波永远是向内的，而反极化场自旋波永远是向外的。

三、三维极化场自旋波左右旋对称的恢复

对于三维极化场，自旋绕 z 轴转动，z 轴在内禀空间中，半空间的存在破坏了空间对称性，使得自旋半空间指向只有一个方向，所以自旋角动量也失去了对称性，只有一个指向。

以后我们将知道弱作用是在极化场内禀空间内行的(即在半空间中)，这样宇称遭到破坏。就自旋波的左右而言，由于静质量的存在，使得极化场的传播速度$<c$，从宏观上来说，自旋波的左右旋对称性得到恢复，在磁场中由于场纤和自旋方向相关，左旋和右便显出差异。但半空间的内禀指向没有恢复，仍然只有一个指向。

第七节　质量本质

在前面，我们一直没有谈及质量问题，现在我们来解决质量问题。对于质量来说有引力质量、惯性质量的概念。在统一场中我们要建立场流形的质量概念，这是一个关于质量的本质的认识。

我们先说引力质量，引力质量是由于质量场的存在造成质量场以外的时空形变而产生一个力场，这个力场对另一个质量场产生一个力，这个力称为引力质量。在自由状态产生一个引力的速度 g，质量 m 的大小由所受到的引力大小表现出来，并满足 $F=mg$。那么惯性质量是什么呢？一个物体处于静止状态或匀速运动的状态(不考虑引力)，此时，并没有表现出质量效应，物体保持原有的状态。当对这个物体施加一个外力，物体为保持原有状态而产生一个抵抗力，并出现改变原有运动状态的效应，满足 $F=m_i a$，施加的力越大产生的加速度也就越大，质量 m_i 的大小由改变物体运动状态的难易表现出来。m_i 称为惯性质量。m_i 为引力质量。引力质量和惯性质量是严格相等，这已为实验所证实。

以上的质量概念都是经典的质量概念，无论是引力质量还是惯性质量都未触及到质量的本质，爱因斯坦的广义相对论使我们对引力有了更深刻的认识。对于为什么引力质量会等于惯性质量，惯性的本质是什么等诸多问题还没有理论解释，这需要建立新的质量理论。现在，我们来建立场流形质量概念。

一、极化场的传播

极化场流形是局域的协变流形，整个场流形都保持三维场流形特性。极化场要沿某一个方向进行传播，那么就必须沿某一个方向有一个场形变。从前面我们知道，这个场形变总是沿自旋角动量方向的，因而传播是沿自旋角动量方向的。当有外界影响时(如通过磁场使带电粒子自旋极化)，传播不一定沿自旋角动量方向。考虑最简单的情况，即沿自旋角动量方向(该方向场形变量最小)，于是我们可以把问题简化，把自旋极化方向的 z 轴上场流形视为一维极化场流形的传播。在考察一维极化场传播时，我们先来看一维量子波的传播。如图 2-1 中第三点的情况，随着时间的推移，i 点向前移动，最后到达最大偏移量 H/2 地，开始回复，最终回到原位。

如图 4-10 所示，O 点的偏移量为 $H/2$ 才能形成波，这是波的传播条件，传播速度为 c。

$$c = \frac{H/2}{t_h} \tag{4-49}$$

i 点的位移随时间的关系为 $H(t) = H_i \sin\frac{\pi}{t_h}t, 0 \leqslant t \leqslant t_h$ 与量子波的频率波长无关。

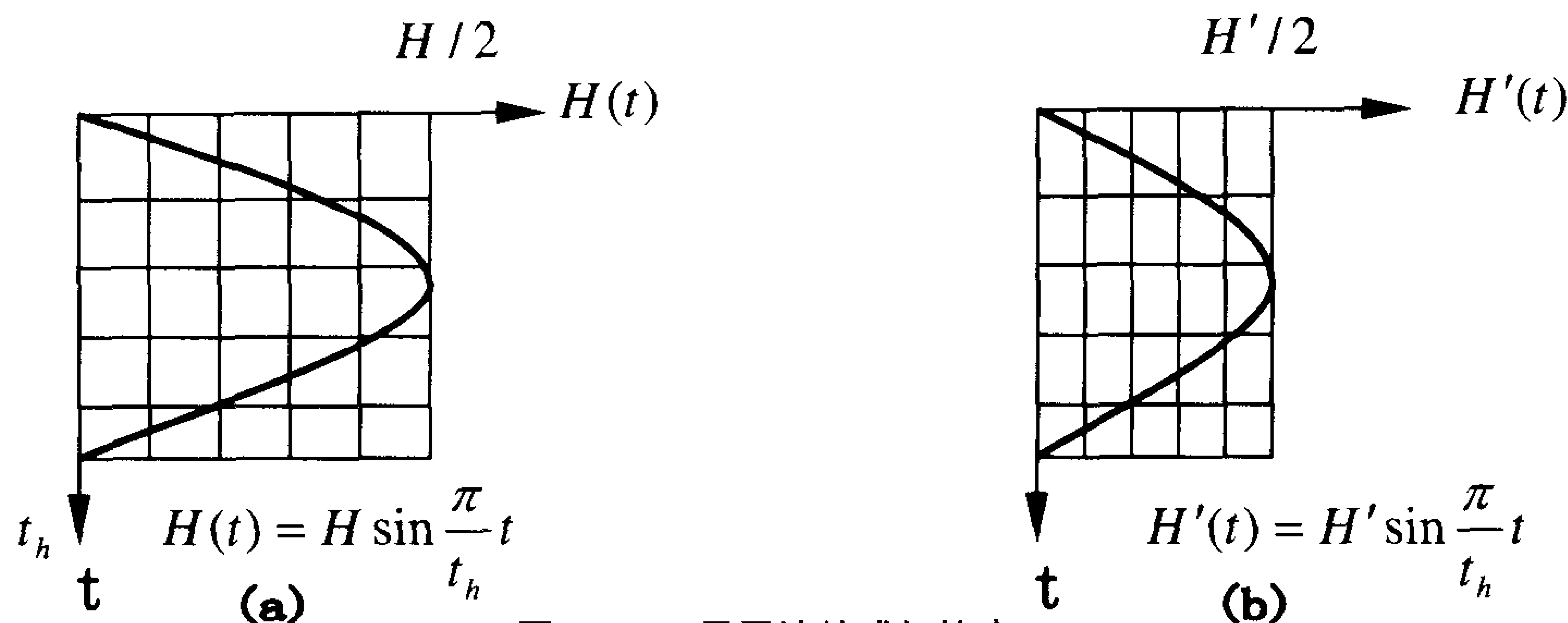


图 4-10 量子波的感知协变

对于整个背景流形被压缩时，如图 4-10(b)所示，$H/2$ 被压缩为 $H'/2$，对于拉伸场也一样，由于场流形被拉伸，弹性变小，最偏移量也变小，而成为 $H'/2$，传播速度变小

$$c' = \frac{H'/2}{t_h}.$$

t_h 是场质的某点由自由状态开始形变，形变至最大量然后，回复到原位所需要的时间。由于场流形是弹性流形，使得场流形中的任意 i 的振动和单摆具有某种共性，如与振幅无关，使终是一个恒量，这个量比其他不变量更为基本。可称为普郎克时间。从简谐振动的知识我们得知由于惯性的性质，i 点的振动会出现停不下来的情况，而图 4-9 显然违反我们关于振动的常识，但我们不要忘记，我们所论述的是场流形，场质本身只有弹性流形的特性而没有质量概念，当然也无惯性可言。

现在，我们来看极化场的传播，如图 4-11 所示：

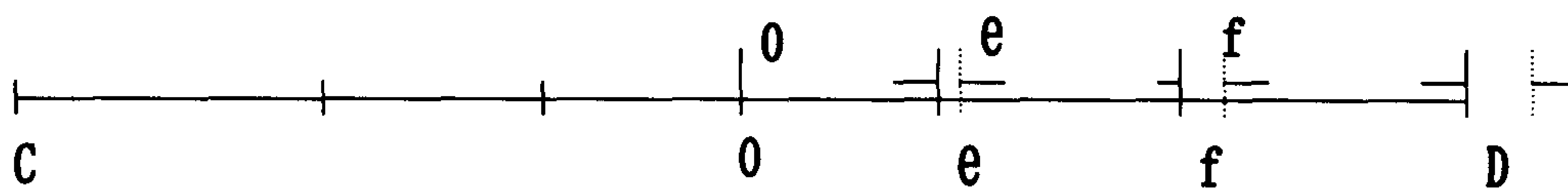


图 4-11 极化场的传播

CD 段为一维极化场，在极心 O 场质被压缩而达到压缩极限失去弹性。由于极化场的形变，在 e 点形成传播条件要使 e 点的偏移量为 $H_e/2$，而在 f 点为 $H_f/2$，D 点以外为无形变区，所以 D 的偏移量为 $H/2$ 时，D 构成传播条件。显然 $H_e < H_f < H$，而整个极化场要传播时，是由极点的情况决定的。我们知道，对于极点来说，极点的场流形达到形变极限，形象地说极点的场流形失去弹性，是一个“硬”的流形点，所以 $H_0 \to 0$，也就是任意小的场应变都能满足传播条件，传播速度 $v = H_0/t_h$ 趋近于 0。当场形变量加大时，强迫 0 点偏移，0 点压缩前面的场质，则量子波的传播速度变大。强迫移动量越大，越困难，由于极化场的存在，0 点的偏移极限量不会超过自由态量子波的偏移量，当 $H_0 \to H$ 时，传播速度 $V \to c$，接近光速，但无法超过光速。

于是极化场有了这种特性，能以任意小于c的速度进行传播，极化场的传播速度V为

$$V \equiv \frac{H_0}{t_h} \tag{4-51}$$

式（4-51）称为场流形速度定义式。

二、惯性质量

质量就是三维极化场流形内禀四动量的一种间接的测量效应。由$h_f = E_f\Omega_i = P_f\Omega_0$可知，能量动量越大，则$\Omega$也就越小，换而言之，极化场就越“硬”，由外部施加一个场形变时，极化场开始传播。极心沿前进方向偏移量H_0与极化场的“硬”度成反比，极化场的内禀四动量越大，则极化场越“硬”，H_0也就越小，表现为传播速度越小。反之四动量越小，极化场越“软”，Ω也就越大。极化场总的平均应变的强弱决定了其极心的“软”“硬”，与场应变的形式无关。而“软”和“硬”决定了极化场的传播能力，本质上就是极化场的质量

$$p_f \propto m \qquad ①$$

只有通过变速运动才能表现出来。极化场的内禀动量p_f和其传播速度成反比，即

$$p_f \propto \frac{1}{V} \qquad ②$$

对于某一内禀动量为p_f的极化场施加的动量p变 大时，H_0就变大，传播速度变大

$$p \propto V \qquad ③$$

由完全相同的外部动量施加在不同的极化场上，将得到不同的速度，由动量守恒知

$$P = V_1m_1 = V_2m_2 = \cdots \qquad ④$$

我们得知不同粒子存在着不同速度，必须乘上不同的系数m_n才能满足动量守恒。这个系数的大小正好反映了极化场流形的内禀四动量的大小,由①和②知，这个量我们称之为质量，就是我们对内禀四动量的间接测量值，这种方式是通过施加动量而产生运动来进行测量的，所测出的量m称为惯性质量。从惯性质量的来由我们可以得知极化波极点沿传播方向x的场应变直接决定了极化波极点沿内禀空间x方向的传播性质，因而量子场m在内禀空间具有方向性。作为整体量子场来说m是量子场整体性质的表现，并不具有方向性。静态极化场具有各向同性的性质，因而在沿任何方向传播时所都表现出相同的质量效应。

对一物体施加一个动量总有一个过程，这个过程中表现为力

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{4-52}$$

$$dp = dv \cdot m$$

$$\therefore F = ma$$

(4-53)

三、质量场的应变表述

从上述对惯性质量的分析来说，质量本质上是极化场传播特性所产生的效应，因而对

于惯性质量来说，任何三维应变都会影响量子场的传播性质。极化场流形的任何形式的应变严格反比于场的传播能力，因而惯性质量不具有方向性。对于量子场的整体引力质量和惯性质量在任何方向上都严格相等。三维极化场流形的静质量场是球形应变的场流形，一般表现球对称应变。可以这样进行表述：

$$m_{内} = \frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} e_x & & 0 \\ & e_y & \\ 0 & & e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2c^2}\begin{bmatrix} \varepsilon_x & & 0 \\ & \varepsilon_y & \\ 0 & & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{4-54}$$

内禀 $m_{内}$ 不再是一个标量而是一个 q 量，$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 对应于沿 x, y, z 的一个矢量。上式表明极化场的传播相对于内禀空间具有方向性,对于理想静态球对称极化场来说 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$。实测的质量 $m_{实}$ 就是整个极化场所表现出来的传播能力。对于球对称来说应变 $|e_x| = |e_y| = |e_x|$，即内禀空间传播特性各向同性。

对于非球对称内禀场流形 $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$，说明极化场处于非静态。实际的情况是极化场具有自旋为非完全球对称场流形，换而言之，对于单个的基本粒子来说传播表现出具有方向性。极化场传播总是沿场应变最小的方向传播，这说明费米子总是沿自旋轴 z 方向运动,$m_x = m_y > m_z$。要注意的是：极化场极点的传播具有方向性，作为一个整体粒子来说传播方向的选择是内禀性质，量子场任何应变都会对极化场的极点及整体传播性质产生影响，因而惯性质量是整体量子场所表现出来的传播性质。

$$m_{实} = E_f / c^2 \tag{4-55}$$

由此可知 $m_{内}$ 是矩阵表述的是 q 数，没有直接的观测效应，多粒子体系 $m_{实}$ 是一个标量，是 c 数，与方向无关，对应我们实际观测到的质量。

中微子是一个很特别的量子场，由自旋量子波构成，场流形的形态近似于二维极化场,$\varepsilon_z = 0$，$\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq 0$。量子场任何形式的场应变都表现为能量，而狭义相对论已经证明所有形式的能量都与质量等价，从而都能产生引力。所以中微子一定存在静质量，这是场流形理论无法回避的问题；另一方面和三维极化场不同的是中微子极点没有场质得失，不影响中微子的传播性。二维极点和量子波灵点耦合后，沿场应变最小的 z 方向传播，z 方向的应变为零，由维度的独立性可知在 z 方向传播的速率和量子波相同，即以光速传播。由于这两方面的原因中微子静质量 $m_\nu \neq 0$，但传播速度 $V_\nu = c$。这种特性是中微子特有的。

四、引力质量

1. 光子重量

光子内禀场流形是纤维结构，而量子场任何形式的场应变都表现为能量，因而纤维结构对时空流形产生影响和其他形式的场应变是一致的，重要的是场应变的大小，而不是场应变的结构。所有能量都有重量，因而光子也有重量。

2. 任何场应变都表现为质量

极化场会对时空流形产生一个微小的影响，使时空流形发生弯曲。自旋波是有能量的，自旋波和极化场构成一个整体，对于一个静止的自旋粒子，所有的不同形式的能量都包括在它的“静质量”中,$E = mc^2$。当带自旋的极化场(即一基本粒子，如电子)一旦运动，其

动能就会产生质量，从而产生引力。

这里我们要注意的是一个物体的能量是与观测者的相对运动有关的，能量是相对的，两物体之间场应变相对差异越大，相对能量越大。以前我们所谈及的能量(应变)是相对于背景流形的。

量子场任何形式的应变所产生的引力效应都是一致的。对于量子场来说，任意的场应变都能产生相同的球对称背景流形应变效应，因为量子场的应变造成的背景时空流形弯曲是极小的，相对于巨大的弯曲背景流形来说，微小的量子场的应变无结构可言，就是一个点，如图 4-2 (a) 所示，再加上无论是正应变还是负应变所产生的引力都是相吸，因而我们有量子场任何形式的场应变都表现为质量，且引力质量和惯性质量相等的结论。

3. 关于引力质量对于我们是一个棘手的问题：为什么任何粒子(无论正粒子还是反粒子)都表现为引力，而不是斥力，完全不遵从同性相斥异性相吸的原则

现在我们来解决这一问题。在场流形理论中，无论是量子波还是极化场都存在内禀空间场流形，所有的场形变都被封闭在内禀空间以内。我们所要讨论的问题是量子场背景流形的场应变，这种应变是非常微小的。但这种微小的应变却构成了万有引力。为什么会具有万有引力？我们要弄清下面问题：

a. 具有相反场流形特性的力场相吸

在图 4-12 中，虚线圆以内表示极化场内禀空间，以外为万有引力空间，即协变场流形空间。外部场流形是几乎平直无任何场形变的流形，对于图中(a)表示正极化场，是由于极心缺损一基本单元场质而造成的，场质向极心坍缩，尽管这种拉伸形变被限制在内禀空间以内，但是对外部背景空间流形仍然会有一个非常微小的影响，背景流形也向极心方向发生极微小的坍缩，内禀空间有微小的收缩，这种收缩使得靠近内禀空间球壳的场流形密度变小，背景时空产生一个微小的正曲率。外部场流形的疏密关系如图所示。由拉伸应变场流形构成的物质就称为正物质。对于图中(b)的情况更容易理解,平直场流形中多出一份基

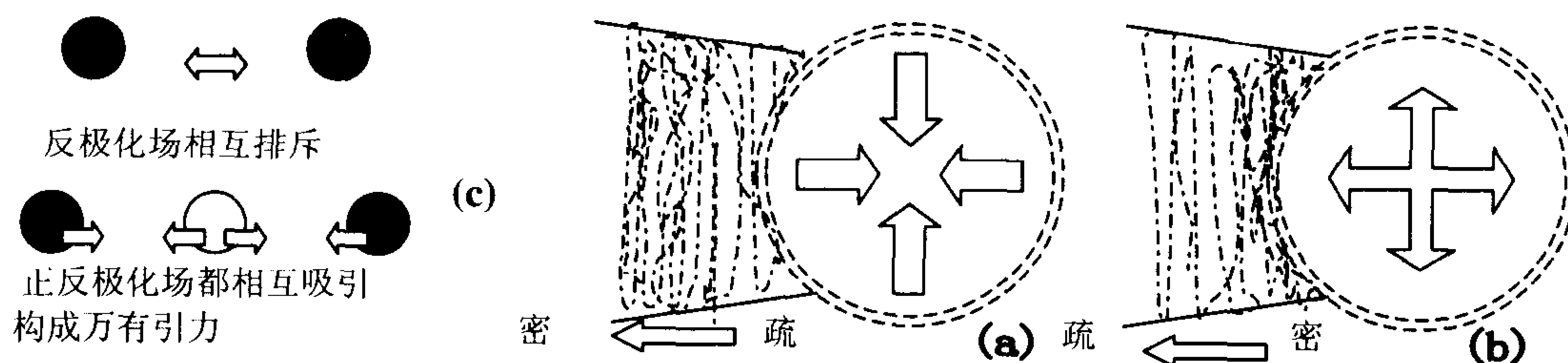


图 4-12 引力场的构成

本单元场质而形成反极化场。反极化场压缩周围的场质，同样这种压缩形变被封闭在内禀空间内，但内禀空间内的场流形由于压缩形变而使内禀空间有微小的膨胀而对外部背景场流形产生微小的压缩，这种压缩使得靠近内禀空间球壳的场流形密度加大。背景时空产生一个微小的负曲率。外部场流形的疏密关系如图所示。由压缩应变场流形构成的物质就称为反物质。拉伸极化场内禀空间和压缩极化场内禀空间一样大，但内禀空间以外的场流形密度具有相反同的特性。上图中所画的为了方便理解显然是夸大了，具体极化场对时空的影响满足(4-33) 式，这就是我们熟知的史瓦西解，在这里极化场静质量 m_0 表现了总能量的大小。对于正负应变所产生的背景时空流形弯曲表现为相互吸引，因为背景场流形力图恢复平直态，换言之，异性相吸。这一点很容易理解。

对于量子波我们可以这样理解：量子波由拉伸场形变和压缩场形变两部分构成，两种场形变都被封闭在球形内禀空间内，对外部流形所产生的效应是相反的，相对引力场来说，量子波可视为内禀空间内存在两点引力场源。对于量子场来说只有三种形态：量子波态、

极化场态和纯自旋波态(对应中微子)。对于其他种类的粒子都是极化场或量子波不同形式的组合。综合上述无论何种形式的粒子对外部空间产生的效应都是相同的，由空间位置不同的点源构成。这种点源无论是何种类形所产生的引力效应都是直接累加的。

b. 具有相同场流形特性的力场为什么不排斥而是相吸

首先，反物质应该有负曲率，而实际的情况却是无论正反物质都产生正曲率，反物质何以产生正曲率？量子波也同样产生正曲率。为什么任何形式的场应变都会造成时空正曲率弯曲而产生正引力？这的确让我们感到困惑不解。其次，相同的力场应该满足同性相斥异性相吸的原则，可为什么总是相吸而表现出万有引力特性？

我们先来考虑第一个问题。对于场流形理论来说，这是很容易理解的。在第一章第七节曲率张量中我们知道量子场的任何形式的应变都会造成背景时空流形的微小形变，背景时空流形形变的大小严格正比于量子场应变的强弱。背景时空流形应变造成场流形“硬化”，场流形硬化的非均匀性本质上就是背景流形的应变大小。而背景流形的应变表现为时空弯曲。这就是为什么任何形式的场应变都会造成时空正曲率弯曲。

对于第二个问题，量子场为什么总是相吸而表现出万有引力特性？对于我们来说这个问题很困难。重要的是和我们所熟悉外界环境很难找到类比，物质总要相互吸引，从场流形论来看，万有引力的场流形本质究竟是什么？

对于应变的场流形总有要恢复自然态的趋势。从弹性场流形所具有的性质来看应该具有如下效应：

①两拉伸应变场流形会拉伸周围的场流形，而彼此向互拉伸。在相互加速靠近的过程中，相互间的背景流形会产生相对松弛效应，而使两应变体相互靠近；②拉伸应变场流形和压缩应变场流形会相互吸引，企图使应变场流形得以恢复非应变平直态；③对于压缩极化场来说，相互靠近会使应变加剧，因而应该相互排斥。综合上述 3 点，我们把拉伸极化场视为正物质，压缩极化场视为反物质，物质的引力特性就会得到这样的结论：正物质吸引一切正反物质，而反物质只排斥反物质。

对于万有引力特性来说，对于任何形式的量子场都应该具有相互吸引的性质才能满足万有引力特性的要求，但上面第③点违反了这种要求。对于场流形理论来说这是一个尚待解决的问题。对于这个问题的场流形解释是当拉伸类量子场和压缩类量子场混合构成时，拉伸类量子场作为压缩类量子场中介场时，就把斥力转变为引力，如图 4-12(c)所示。于是构成了万有引力。这就是万有引力的场流形本质。关于这一点，我们需要更严格的证明，并定量考虑对于正反极化场不同分布时的影响以及相互间力场关系如何，大量不同应变形式量子场所构成的大块物质时的万有引力是应该满足单个量子场引力的累加性。

第八节　狭义相对论

一、光速不变原理的场流形解释

我们先来考虑一种最简单的情况，即空间被压缩的情况，如图 4-13 所示。场流形(a)自由状态场流形被压缩为(b)，(a)中的背景流形为自由状态。γ 为量子波，量子波的总偏移量沿 x 方向为 H，传播速度为 c 即为光速，i, j 分别为两个不同质量不同传播速度的极化场，i 的偏移量为 H_i，j 的偏移量为 H_j，当动量无限大时，i, j 的极限偏移量 $H_i \to H$，

$H_j \to H$，表现为速度趋近于c。

当整个空间在沿x方向被压缩后，成为图 4-13(b)中的情况，量子波γ'的极限偏移量为H'，动量无限大时，i', j'的极限偏移量H_i', H_j'减小为H'。空间的均匀压缩使得$H : H_i' : H_j' = H' : H_{i'}' : H_{j'}'$，比例关系不变。这样便明显地发生感知协变，在(b)中时空在x方向被压缩，基准时钟(例如选i)和基准尺度一起被压缩，因而所测量的结果没有任何变化，在i'看来γ'的传播速度仍为c，j'的速度也没有变化。

现在我们来考虑当设(a)的背景流形为静止参照系时，在(a)中i, j极化场传播的速度为U_i和U_j，场偏移量为H_i和H_j，把i, j的传播速度变快，成为U_i'和U_j'

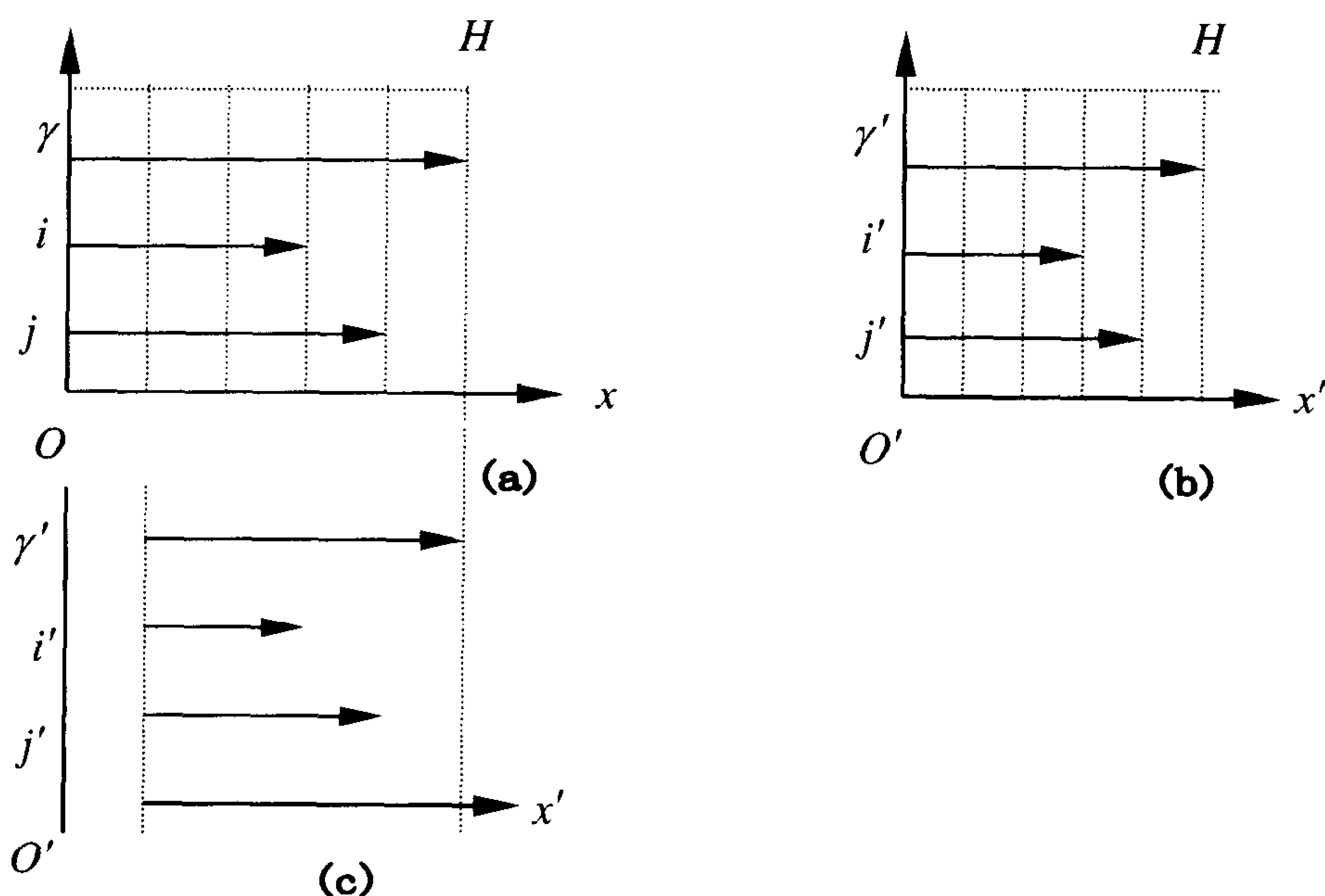


图 4-13　光速不变

$$U_i' = U_i + \Delta U$$

$$U_j' = U_j + \Delta U$$

相对于原来的i, j速度增加了ΔU，场偏移量增加了ΔH，如图(c)所示，那么γ'由O'沿x的最大偏移量为H'，比H减小了。

$$H' = H - \Delta H$$

极化场i', j'在动量无限大时的极限偏移量由原来的H减小了ΔH，而成为H'，那么i, j增加了速度ΔU便等价于场流形被压缩，图(b)、(c)是等价的，γ'，i', j'在以速度为ΔU构成的运动系统中：

$$H : H_i : H_j = H' : H_{i'} : H_{j'} \tag{4-55}$$

所以在(c)中仍然会发生感知协变，仍以i为基准时钟，传播距离(相对于O')为基准尺度，相对于标准时钟i而定，γ'的传播速度仍为c。j的传播速度没有任何变化。

所以光速不变原理的本质就是感知协变，在超大统一场理论中，光速不变原理是一种自然的结论，而不再是一种假设。在超统一场中，H 和光速是一个相对不变量，真正不变的只有 t_h 和狭义相对论不一样的是，相对性失去了绝对的意义，在场流形中，的确存在一个最优越的背景流形，这里 H 为最大值，时间也最快。当以这种背景流形作参照系，以任何方向发射火箭，都会导致时间变慢。

二、狭义相对论假设的场流形解释

在狭义相对论中引入了 5 个假设，现在我们对每一条假设作出场流形的解释。

狭义相对论**假设** 1：存在着惯性参考系，在其中物理定律具有特别简单的形式，相对于“固定的”恒星静止的参考系是惯性系，所有相对于这些惯性参考系以恒定速度运动的参考系也是惯性参考系。

从场流形的观点来看就是在一个大的平直或非平直背景流形中，存在由极化场和复合极化场(即重子，在第八章有专门论述)构成的庞大的集合组成了我们的物质世界，当这个极化场的集合在背景流形中沿某一个方向以相同的速度传播时便构成了一个物质参照系，这个参照系对于背景流形要发生感知协变，换而言之，对背景流形是不可感知的。在同一背景流形中，存在一个小的极化场集合，也以相同的方向和速度传播称两物体相对静止。对于在这种集合(大集合或小集合)上建立的参考系就是静止的惯性系。若小集合构成的物质体系在同一背景流形下相对于大物质的传播速度和方向不同，但处于自由传播状态，那么在小物体上建立的参照系也是惯性参照系。总而言之，以上可以简化为在以做自由传播的极化场体系为参照系称为惯性系。物理定律就是极化场子集间的相互内在关系的表述。在惯性系中，由于没有外加干涉因而有特别简单的形式。

狭义相对论**假设** 2：可以把参考系选为三个笛卡尔(Descartes)坐标轴(带有必要的米杆)，一些同步的钟和一些检测仪器。

狭义相对论**假设** 3：观察者之间的联系是借助于电磁波(光束)来进行的，对于所有的惯性观察者而言，这种电磁波必以同样的速率（≈3×10^{8}m/sec）传播。

光速不变原理在狭义相对论中是一个核心假设，在场流形中，是一种自然的结论。

狭义相对论**假设** 4：庞加莱(Poincane)变换

$$\bar{x}^{v} = L^{v}{}_{u}x^{u} + d^{v} \tag{4-56}$$

把“不带横线”的惯性系中的观察者 O 对于一个世界事件(位于时空中的一个物理现象)的时空测量 x^u 与“带横线”的惯性系中的观察者 $\overline{O}$ 对于同一世界事件的时空测量 $\bar{x}^u$ 联系起来了。这里 $x^v\,(v=0,1,2,3)$表示ct,x,y,z，且称为一个 4 维向量。4 个量 d^v 与x^v 无关。通过坐标原点和时间初始值的适当选取可以使它们为零。4×4 矩阵 L^v_u 也与x^v 无关，但它依赖于 6 个参数：确定带横线系相对于不带横线系取向的 3 个欧拉(Eulen)角，以及两个坐标系分离的相对速度的 3 个分量。L^v_u 的明晰形式由两个相邻的世界事件的 4 维间隔的不变性要求决定。4 维间隔为

$$\eta_{\mu v}d\bar{x}^{u}d\bar{x}^{v} = \eta_{\mu v}dx^{u}dx^{v} \tag{4-57}$$

这里的洛伦兹(Lorentz)度规 $\eta_{\mu v}$ 为

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\eta^{\mu\nu} \tag{4-58)}$$

从场流形的观点来看，背景流形是三维场流形，显然我们可以在三维背景流形中建立三维笛长尔坐标轴，但这些坐标轴随背景流形的形变而形变，米杆是由极化场集合构成，检测仪器也是一种极化场集合的组成，对于背景流形的形变是不可感知的，但对于另一个极化场集合是可以感知的(或可测的)。同步时钟的本质是在同一背景流形下存在两个相对静止作周期传播的极化场集合(指针)具有相同的角速度传播和起点，两个时钟分开后，在不同背景流形下或不同速度下，时钟的传播速度存在差异。总之，以上简化为极化场集合之间若存在着差异，这种差异是独立的非感知协变的, 是可测的。

在第二章第二节中，我们知道时间的本质就是场质的量(即形变场流形的量)，这里所谈及的时间是三维背景时间，特指钟所经历的场质的量，时空是场形本质的两种表现形式，自然存在严格的对应比例关系，表现为 4 维时空间隔不变。

狭义相对论**假设 5**：在庞加莱变换中，时空的耦合只出现在有相对运动的方向上，而在与相对运动垂直的方向上没有耦合。

这一点对应着场流形维度独立性假设。

由前面的场流形理论对 5 点假设的说明可以看出狭义相对论前 4 点假设都能由场流形理论自然导出，在场流形中关于狭义相对论部分的 5 条假设减少为一条假设。

（4-56）式的微分是

$$d\bar{x}^{\nu}=L^{\nu}_{u}dx^{u}=\frac{\partial\bar{x}^{\nu}}{\partial x^{u}}dx^{u} \tag{4-59}$$

把形式为(4-59)式的表达式代入（4-60）式，就有

$$\eta_{\sigma\lambda}dx^{\sigma}dx^{\lambda}=\eta_{uv}d\bar{x}^{\mu}d\bar{x}^{\nu}=\eta_{uv}L^{u}_{\sigma}L^{\nu}_{\lambda}dx^{\sigma}dx^{\lambda} \tag{4-60}$$

这里我们已把哑标用适当的字母重新标记过，因为这一等式必须对任意的 dx^{σ} 和 dx^{λ} 都成立，所以我们必须有

$$\eta_{\sigma\lambda}=\eta_{uv}L^{u}_{\sigma}L^{\nu}_{\lambda} \tag{4-61}$$

这正是一组赝正交条件，他们构成 10 个独立的方程。这就使自由参数的个数由 16 减为 6，（4-61）式是使 $\bar{x}^{\nu}=L^{\nu}_{u}x^{u}+d^{\nu}$，即(4-56)式为庞加莱变换的必要和充分条件。

如就有 $t=\bar{t}$ 。此时容易证明，（4-61）式简化为正交矩阵(即 L^{u}_{v} 的 3×3 空间部分),并满足 $L\tilde{L}=I$ 。此时相应的 3×3 正交矩阵正是联系相差一个转动的两个观察者的转动矩阵。

现在我们希望验证一下，(4-56)给出了匀速分离观察者之间的洛伦兹变换，不失一般性，我们取一个特殊的情况来讨论。设 x,y,z 方向与 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 方向一致，而且相对速度 v 沿 $x=x'$ 方向。假设 s (以及空间的均匀性)保证：

$$L^{2}_{2}=L^{3}_{3}=1\quad,\quad L^{2}_{0}=L^{0}_{2}=L^{0}_{3}=L^{0}_{3}=0\quad,\quad L^{i}_{j}=0,\text{对于}\, i\neq j,\quad i,j=1,2,3,$$

因此，L^{u}_{v} 具有下列形式：

$$L_v^u = \begin{bmatrix} r & \delta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-62}$$

条件(4-61)使(4-62)式简化为下列形式：

$$L_v^u = \begin{bmatrix} \gamma & -\sqrt{\gamma^2-1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\gamma^2-1} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-63}$$

因此，从(4-59)式和(4-63)式可得：

$$d\bar{x} = \gamma dx - \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot cdt$$

为了确定γ，我们注意到观察者 O 在简单地记录$\overline{O}$的原点这一特殊情况中，我们有$d\bar{x} = 0$及$dx/dt = v$，因此

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4-64}$$

我们看到L_v^u给出了 Lorentz 变换的通常形式。显然(4-46)式最简单的情况是v和c是相对于背景流形的速度。在场流形中，由于存在感知协变，对于任意以速度为u运动的参照系中某一物体以v运动时，v/c的比例关系不变，光速永远为c。因而 (4-46) 式也满足以u运动的参照系。在统一场论中，由于场流形的引入，存在一个绝对的背景场流形参照系，所以相对于背景场流形是静止的参照系有最快的时钟。由于背景场流形的存在这是一个严格的条件，使得任意参照系间严格的相对性失去了意义。例如，某粒子以接近c的速度相对于地球运动时，粒子时钟相对地球时钟变慢，但地球时钟相对粒子时钟并不变慢。

三、相对论力学

我们首先对运动的粒子定义一个称为固有时的不变量，考虑以背景场流形为参照系，粒子具有一个定义得很好的瞬时传播速度$\vec{v}$，其大小要比光速c小，即使在粒子被加速时，它的速度时时刻刻也都有完整的定义，而且我们可以找到一个洛伦兹系，它在那一瞬时是与该粒子共动的。在这样一个坐标系(带横线的坐标系)中，粒子在此瞬时是静止的。因此，对应于时间间隔dt的 4 维不变距离可以写为

$$\begin{aligned} dx_v dx_v &= d\bar{x}_v d\bar{x}_v = -c^2(d\bar{t})^2 = -c^2(d\tau)^2 \\ &= (dx)^2 + (dt)^2 + (dz)^2 - c^2dt^2 \\ &= -c^2(dt)^2(1-\beta^2) \end{aligned}$$

其中$\beta = v/c$。由此，我们定义固有时$d\tau$为

$$d\tau = (1/\gamma)dt \tag{4-65}$$

这就是著名的爱因斯坦时间膨胀公式。在场流形中，这个公式是具有单向性，即对于任意以速度为u运动的参照系中加速某一物体使之以v运动时，由于存在感知协变，光速

从任意方向测量恒为c,v/c的比例关系不变。相对于以u运动的参照系时钟来说，粒子的时间膨胀，也满足式（4-65）。要注意的是以u运动的参照系场流形等价于沿$\vec{u}$方向背景流形被压缩，因而以u运动的参照系时钟相对于绝对静止无应变背景场流形时钟来说发生膨胀，满足式（4-65）。此式没有相对性，当以粒子为参照系时则背景流形的时间不会变快。

dx_v是一个4维向量，而$d\tau$是一个标量，因此由

$$u_v = dx_v / d\tau \tag{4-66}$$

定义的4维速度u_v便是一个4维向量，如果我们把粒子的静止质量M_0也作为一个标量，那么我们就有由

$$p_v = M_0 u_v \tag{4-67}$$

定义4维动量p_v，再引入一个4维向量K_v，其定义如下

$$K_v = d(M_0 u_v)/d\tau$$

这样我们就能写出牛顿定律的推广

$$U_k = \frac{dx_k}{d\tau} = \gamma \frac{dx_k}{dt} = rV_k, \quad k = 1,2,3 \tag{4-68}$$

$$U_4 = ic\frac{dt}{d\tau} = ic\gamma \tag{4-69}$$

当$|\vec{v}| \to 0$，有$p_v \to (\vec{p}, iM_0 c)$，这里$\vec{p}$是牛顿力学中使用的通常的动量。显然对于同样的极限，$K_j \to F_j (j = 1,2,3)$，这里F_j是牛顿力$\vec{F}$的第j个分量，而第4分量K_4具有下列意义：

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{d}{d\tau}(M_0 v_4) = iM_0 c\frac{d\gamma}{dt} = iM_0 \gamma c\frac{d}{dt}(1 - \frac{v_k v_k}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \\ &= -iM_0 c\gamma(1 - \frac{v_k v_k}{c^2})^{-\frac{3}{2}} \frac{v_j}{c^2}\frac{dv_j}{dt} = \frac{iM_0}{c}\gamma^4 \frac{dv_k}{dt}(-v_k) \\ &\to \frac{i}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \quad (\text{当}|\vec{v}| \to 0) \end{aligned} \tag{4-70}$$

由此，我们看到在低速的极限下，4维力K_v的第4分量正比于3维欧氏空间中分量为K_j的力的“功率”，最后，如果我们一般地认为

$$K_4 = \frac{i}{c}\cdot(\text{外力做的功率}) \tag{4-71}$$

那么就有

$$\begin{aligned} K_4 d\tau &= \frac{i}{c}(\text{在时间}d\tau\text{内能量的增加}) \\ &= d(M_0 U_4) = dp_4 = icM_0 d(\gamma) \end{aligned} \tag{4-72}$$

爱因斯坦认为粒子的总能量

$$E = -icp_4 = M_0 c^2 \gamma \tag{4-73}$$

$\vec{U}$ 很小时，　　$\vec{p}=M_0\vec{v}+0(\vec{v}^3)$

$$E=M_0c^2+\frac{1}{2}M_0\vec{v}^2+0(\vec{v}^4)$$

$\gamma\to 1$时,$E\to E_0=M_0c^2$,所以把M_0c^2理解为静能，而动能为

$$T=M_0c^2\gamma-M_0c^2=M_0c^2(\gamma-1) \tag{4-74}$$

我们引入一个动力学质量$M=\gamma M_0$，使得

$$E=Mc^2 \quad 以及 \qquad T=(M-M_0)c^2 \tag{4-75}$$

我们还注意到标积 $p_v p_v$ 现在可以写为

$$p_v p_v=(p_1^2+p_2^2+p_3^2)-E^2/c^2 \tag{4-76}$$

在粒子是瞬时静止坐标系中，我们显然有$\overline{p}_v\overline{p}_v=-m_0^2c^2$，因此我们一般地写出

$$E^2=c^2p^2+M_0^2c^4 \qquad (其中p=(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}) \tag{4-77}$$

第九节　极化场的波动特性

极化场的传播场流形可以分解为静态极化场和量子波的耦合，我们知道量子波的传播条件为灵点在沿 x 方向上的一维总偏移量为H。当背景空间压缩时，总偏移量H被压缩为H'，变小，如图 4-9b 所示。背景空间为协变流形，若背景流形为局域协变形时，即是极化场和量子波耦合。对于极化场来说，在R以外为平直流形(这里引力效应被忽略)，在低能情况下，由于量子波的能量低，所以量子波的波长大于极化场的内禀直径。如图 4-14 所示，在极化场R以外对量子波并无影响，量子波的总波长不变，在极化场R以内，量子波的场移动量变小，量子波的灵点和极点相重合，为 O 点，极点发生偏移，偏移量为H_0，极化场的传播速度 $U=\frac{H_0}{t_h}$。

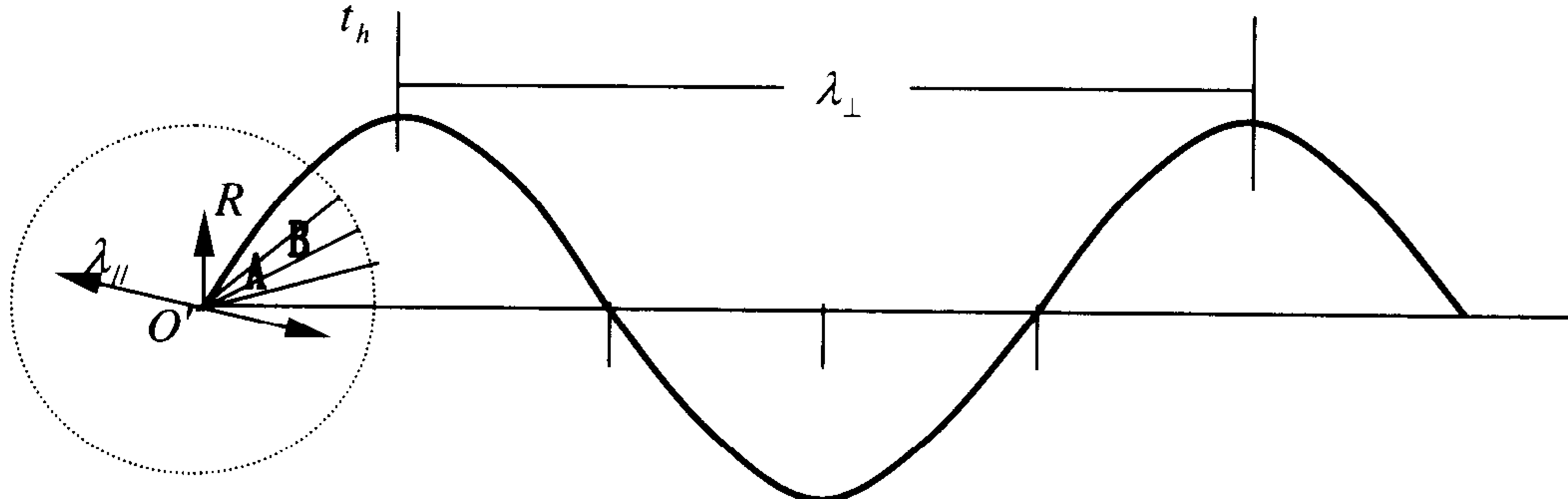


图 4-14　极化场极心的波动轨迹

极化场在极心处最“硬”，而在R球壳边缘处最“软”，对于这种“软”“硬”来说是由极化场的内禀四动量大小决定的，而极化场的“软”“硬”又决定了极化场的可偏移量的大小，对于量子波来说，沿r的一维偏移量的大小为：$\frac{H}{2}\cos\frac{\pi}{\phi}r\sin\theta\cos\varphi$，三维极

化场沿 r 的一维偏移量的大小为：$u_r = \frac{H}{2}\cos\frac{\pi}{\phi}r$。我们现在来构造耦合以后的量子场一维偏移量。量子波和极化场耦合以后，偏移量被压缩，耦合部分的量子波被极化场吸收，产生以下效应：

(1) 耦合极化场的极点和灵点为同一点且极化场场纤和量子波的场纤耦合成同一场纤，场纤的数量和单量子场相同。

(2) 极化场为局域时空流形，而量子波则是纤维流形，两种流形是相互独立的。耦合后的量子波球体能量一般比极化场的静能小，因而量子波球体比极化场球体要大。耦合后量子波的场纤分为两部分，如图 4-14 所示：一部分是极化场内禀空间的场纤 A，另一部分是量子波在极化场内禀空间之外的场纤 B，B 部分的场纤并没有什么改变。A 部分的场纤随极化场内禀空间的形变而形变，在 R_f 以内，场偏移量被压缩，但回到自由状态的背景流形中，量子波的总偏移量仍为 $\hbar$。极心沿传播方向发生偏移，偏移量为 H_0，传播速度为 $v = H_0 / t_h$，耦合极化场的量子波部分在耦合前的最大偏移量为 H 变为耦合后的 H_0，即 $H \to H_0$，极化场内禀空间内的场纤应变

$$u_r = \frac{H_0}{2}\cos^2\frac{\pi}{\phi}r\sin\theta\cos\varphi \tag{4-78}$$

这里 $r \le R_f$；在极化场内禀空间以外的场纤应变不变仍为

$$u_r = \frac{H}{2}\cos\frac{\pi}{\phi}r\sin\theta\cos\varphi \tag{4-79}$$

其中 $R_f \le r \le R_b$。

(3) 两种量子场虽然结构不同，但耦合之后极心应变增加，传播能力变弱，惯性质量增大。两种量子场存在独立性，因而耦合后这个系统的总能量

$$E = E_f + E_b \tag{4-80}$$

为粒子的总能量，即由静能和动能之和

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{4-81}$$

这里的 $m = E_f / c^2$，相对于背景流形的传播速度为 $v = H_0 / t_h$。

(4) 量子波的动量被极化场吸收以后，并没有改变量子波的特性，耦合后的量子波和自由态量子波的传播性质一样，由于在 yz 面上，耦合量子波的场形变最小，所以在受到扰动后要沿 yz 面振动，灵点和极点是同一点，所以极化场的极心轨变和灵点的轨迹是同一轨迹，为正弦波，如图 4-14 所示。耦合以后的极化场

$$E = \hbar\omega,\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{4-82}$$

这里 $\omega = \frac{2\pi}{t_\lambda}$，$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$。

对于观测来说，和自由状态一样，三维极化场是局域协变流形，对于量子波的横波的传播特性并无影响，仅是振动的速度变慢，沿 yz 面最大速度是 v，最大振幅仍为 $\lambda_{//}/2$，

波速仍遵循维度独立原理，和第三章关于量子波的横波特性情况一样，我们得到极化传播的横波为

$$\Psi_{\perp} = \cos[\vec{k} \cdot r - k_0 t] \tag{4-83}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} \quad , \quad k_0 = \frac{2\pi}{t_\lambda} = \omega \tag{4-84}$$

$$E = \hbar\omega \quad , \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

把(4-83)式写成复数形式：

$$\Psi = e^{i(\vec{k}\cdot r - \omega\cdot t)}$$

对于多个动量相同的粒子设 A 为波的恒定振幅，有

$$\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(p.r - Et)} \tag{4-85}$$

这便是极化场的横波，即德布罗意波。

(5) 我们最后还要注意的是任何极化场的运动都来自于极心发生偏移，而极化场可视为局域弯曲时空，使得偏移量变小。偏移量 H_0 虽然很小，但仍然产生了量子波的纤维场结构，产生的机制和平直空间是一致的。因此，极化场的传播就完全等同于极化场和量子波的耦合。

第十节　极化场的纤维特性

一、纤维场的形成

极化场流形丢失一份场质(考虑正极化场)，就造成极心附近的场流形极度弯曲，这种极度弯曲使场质在沿 $\vec{r}$ 方向达到压缩极限时，仍不能满足弯曲的曲率，于是便使场质产生间隙，场质就会填充这部分场流形真空，于是就形成了纤维场。如图 4-15 所示。图中的虚线部分的场质就纤维流形。这里要特别注意的是所填充的真空的量就决定了场纤的数量。真空的量越大，所需填充的真空的量就越多，反之则越少。由于所丢失场质是一基本单元场质，因而场纤量是一个定数。对偶极化场的情况正好相反。

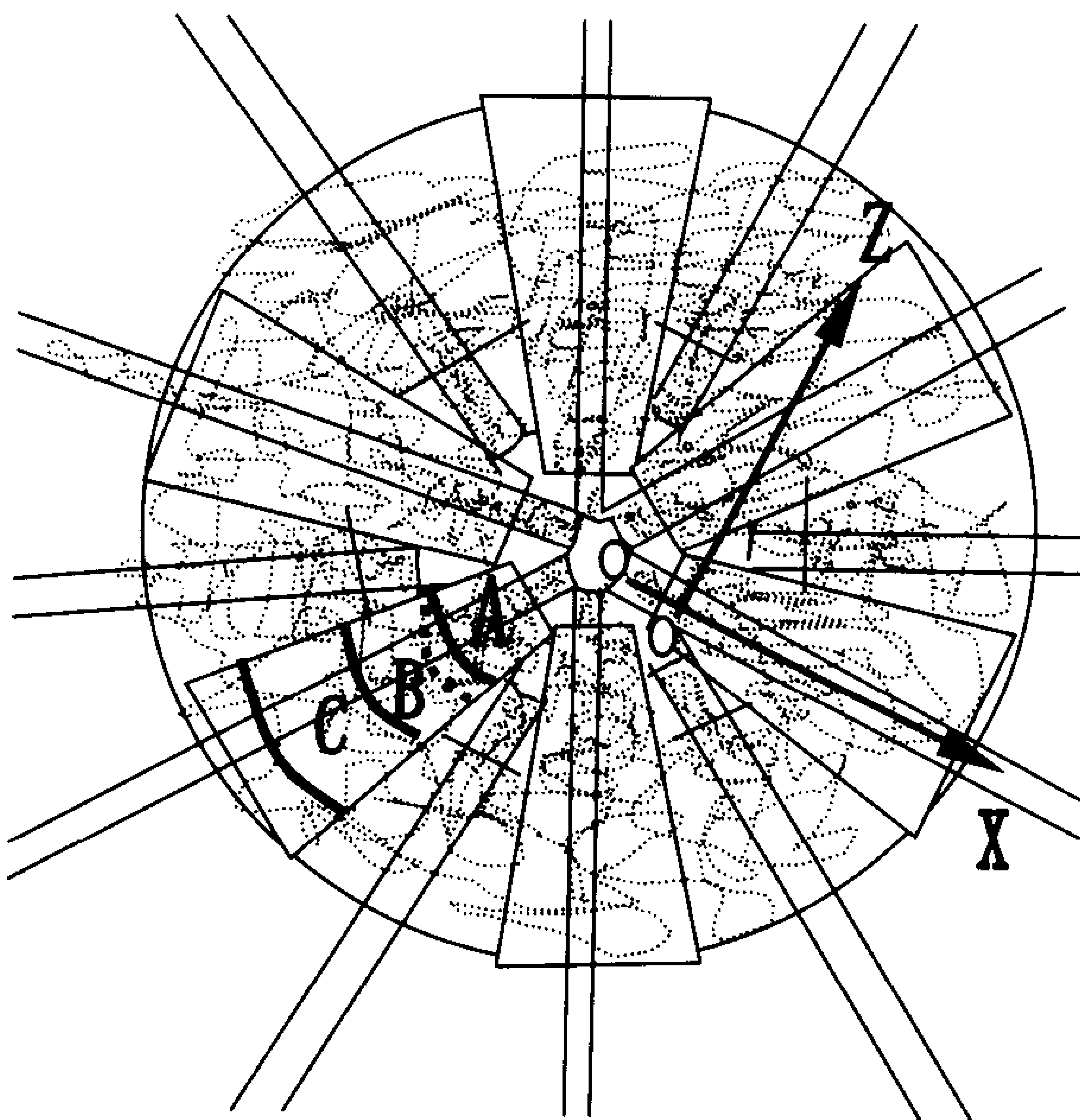


图 4-15　极化场纤维场的形成

对于场流形来说，场流形的最小单元的场质都具有完备的三维特性，如图 4-16 所示。可以把这一份场质称为 p。当场质填充间隙时，对于某一份场质 o' 在 yz 方

向场质虽然被压缩，但在 yz 上并不改变维度特性，而沿 x 方向的场质会向后移动一个量 ε，如图 4-16(b)所示，并不改变场质 o' 的三维特性，和其紧密相连的基本单元场质也会发生 x 维的场质向后移动一个小量，这样一直持续下去，就在 x 方向上形成场纤，且场纤的长度为无限长。对于反（压缩）极化场来说，情况正好相反，也同样形成了场纤，但场所是向前移。

这里，我们还要明确一个概念，即维度独立性。在图 4-16(b)中，我们说场质 o' 具有完备的三维特性，于是我们便把场质 o' 分为三部分，分别是沿 x, y, z 的场流形，并称这

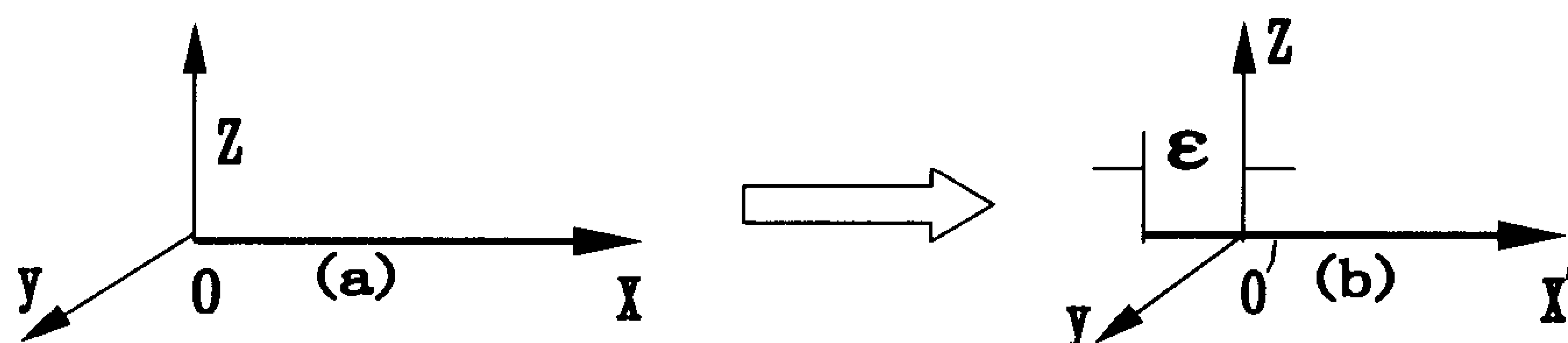


图 4-16 单纤维

三维度独立性，即 x 值场质沿 x 移动一个小量 ε，并不改变 z, y 维场质的性质，彼此是独立的，即场质具有维度的独立性。

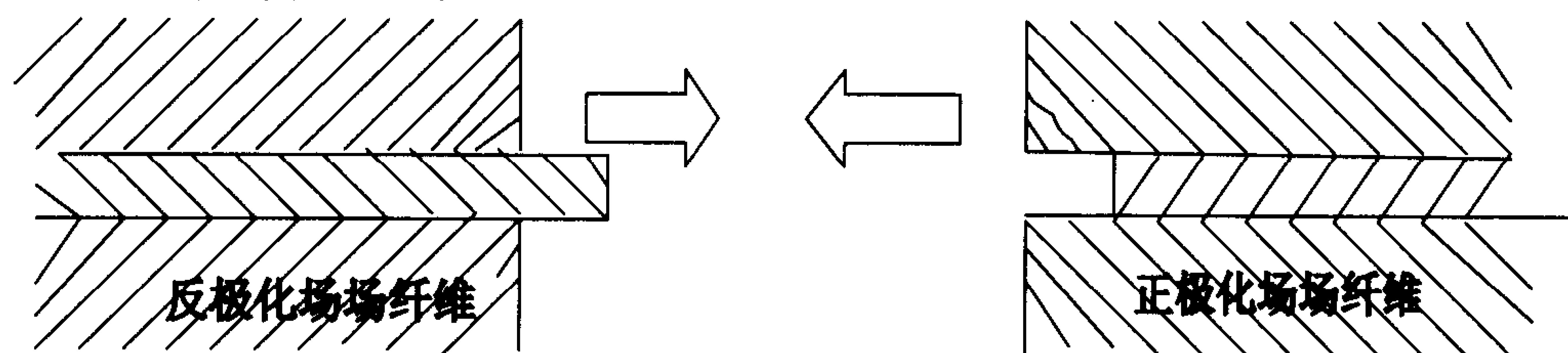


图 4-17 纤维场流形构成电场

纤维场的存在不改变维度特性，对整个场流形没有影响，而对于正纤维场和反纤维场相遇，场质有一种恢复平直状态的趋势，使两者力图结合在一起，如图 4-17。这便是我们所熟知的电场。电场的本质是纤维场流形。

二、场纤维的数量

场纤的数量是由极心丢失场质的量的多少决定的，极心丢失的场质最初要由极点 O 周围的场质通过移动三维中的一维场质来填充真空，与极化场的四动量无关，然后才有二级效应、三级效应……n 级效应，直到场流形的形变能填满弯曲曲率所产生间隙为止。所有这一切全部都决定于极心丢失的场质的量（参见图 4-15）。

对于场流形来说，能保持场流形三维特性的最小单元的场质，我们称为一个场流形的基本单元，或称为三维场流形的一个基本的“点”。极化场只丢失(或得到)一份场质才最稳定。所以对于极化场来说极心丢失的场质只有一个基本单元的场质，因而纤维数的总量就被决定了。这种极化场的纤维总量就是一个基本电荷 e，是一个与极化场内禀四动量无关的量，所以基本电荷的本质是由是基本单元的场质得失所造成的。

由极化场的形成我们知道极化场只有在得失一份基本场质时才能形成有质量极化场，而基本单元场质的场质的得失又必然产生一对偶纤维场流形，纤维的总量为 e，是一个基本不变量，所以我们得到如下结论：

有质量纯极化场必然带有电荷，且电荷量为基本单元的场质得失的量。

当然，存在不带电荷的费米子，是复合极化场，以后我们会谈到。

第十一节　量子力学

量子力学是严格而优美的理论，现在在量子力学与相对论的哲学基础之间的交接处，有深刻的和令人困惑的问题，但在场流形理论中，这些问题迎刃而解。我们先来看量子力学的假设。量子力学的假设是量子力学建立的基石，我们将用场流形的观点来重新理解量子力学的假设，先把量子力学的假设逐条写出，然后再逐条进行分析。

量子力学**假设** I

对于一个由点粒子构成的体系，它的状态由一个复值(波)函数 $\Psi(x,t)$ 完全确定。我们把它解释为几率密度幅，这指的是，

$$\left|\Psi(x,t)\right|^2 dx$$

表示在时刻 t 测量粒了的位置时，粒子位于 x 到 $x+dx$ 这一闭区间中的几率，因为全部几率必定是 1，所以我们有归一化条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi(x,t)\right|^2 dx = 1 \tag{4-86}$$

现在我们从场流形的角度来看这个问题，在前面我们已经知道了极化场波粒二象性的成因，如电子在沿 $\vec{r}$ 方向传播时，未曾受到任何扰动时极点的轨迹是一条直线(当然这种可能性很小，因电子从原子中出来本身就是一种扰动)，而在受到扰动后在垂直于传播方向 $\vec{r}$ 的方向上作简谐振动，电子极点的运动轨迹变为轴为 $\vec{r}$ 的余弦(或正弦)曲线。在波峰处(正负波峰)极点的传播线速度最慢，而在过 $\vec{r}$ 轴时，极点传播的线速度最快，参见图 4-14。从统计的角度看，在波峰处几率最大，而在 $\vec{r}$ 轴上，几率最小。

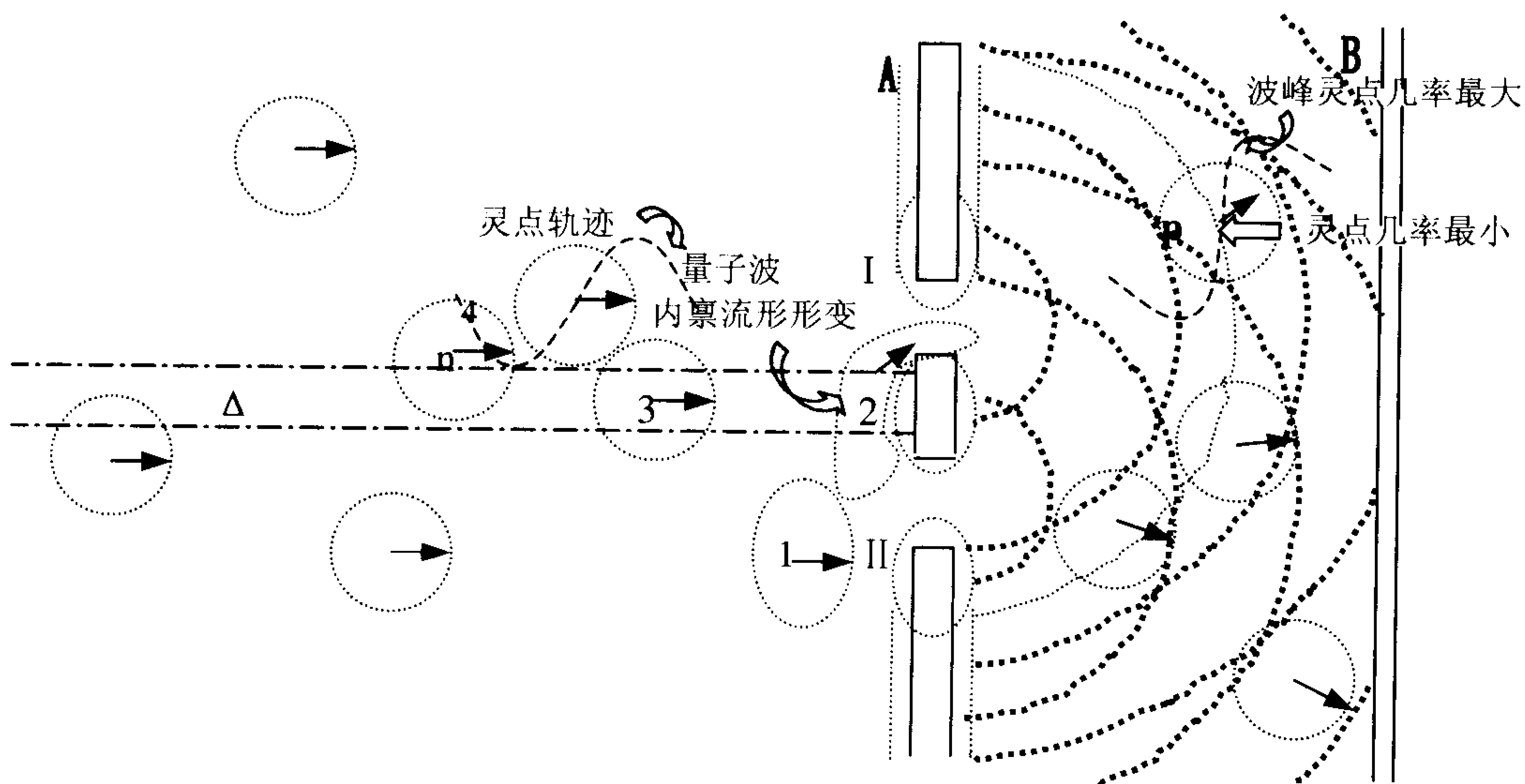


图 4-18　波粒二象性的场流形本质

现在我们来具体看一下量子波的单缝衍射(电子的衍射和量子波的衍射特性是完全一致的，参见本章第九节极化场的波动特性)。在 A 上有一条缝，缝的大小和电子的振幅大致

接近便能形成扰动，即如图 4-18 所示的缝 I (先不考虑缝II)。在 A 之前，假设所有电子的动量和能量均相等，虽然每个电子的动量(表现为传播速度)均相等，都在沿与传播方向垂直的方向作简谐振动，但由于相位不同，所以不可能形成条纹。经过 A 时，缝 I 对电子给予了一个新的扰动，而这种扰动的位置对于所有的电子均相同，量子波从 A 的缝 I 出来后，获得了统一的相位。另外，电子在受到扰动后，改变了原有的运动方向，由于能量低，所以这种扰动是弹性的，不改变原有电子的动量，仅改变方向。于是经过 A 缝 I 的衍射后，在屏 B 上就形成了电子波的单缝干涉条纹。缝本身就是一个扰动源，缝的宽度越窄，则量子波形变越大，扰动越强烈，相应散射的角度越宽。在图 4-18 中，A 屏以前所画的是极化场的示意图，虚线圆环表示电子的量子波内禀空间半径，中心表示极心和灵点，而虚线的正弦曲线表示极心的轨迹。在 A 和 B 之间我们可用几率的形式来表示出来，在波峰(粗虚线)处，几率最大，其中我们只画了一点 p，用内禀空间和轨道示意图表示，可以看出波峰的位置是粗虚线表示，几率最大，而在细虚线处几率最小。

在上面所表述的波粒二象性中我们还要特别注意电子扰动源的问题，考虑双缝干涉。如图 4-18 所示。对于双缝的虚线部分是对电子所实际产生干涉的场流形。电子的波动是由极化场和量子波耦合而产生的，极点和灵点重合为同一点。波动特性是由量子波流形决定的，量子波内禀场流形和双缝虚线部分的场流形接触以后，量子波内禀场流形发生形变，如图 4-18 所示，量子波场流形 2 的灵点有可能进入缝 I 或者缝II，具体灵点进入那条缝则要视量子波形变的情况而定。量子波具有了可选择性，换而言之，在图 4-18 中区域Δ内的量子波能感知道存在双缝。区域Δ内的量子波具有可选择性，可选择性使得双缝干涉和单缝干涉大不相同，形成双缝特有的干涉条纹。要注意的是在整个过程中，量子波场流形都是一体的。在通过双缝时，从双缝出来的场流形会发生干涉，这种双缝干涉是量子波特有的可选择性造成的。在整个干涉过程中灵点(极点和灵点耦合为同一点)只有一点，灵点被限制在量子波内禀场流形内，因而场流形的扰动使灵点的位置发生改变，灵点可能从任何一条缝中通过。从双缝屏 A 出来之后，所汇合成的完整量子波在未受到新扰动之前永远带有被干涉之后的波动特性，如果该量子波能沿原路径丝毫不差地返回，可以回复到未干涉前的状态，只是运动方向相反。换而言之，满足时间反演。量子波的自体干涉使得电子极点受到扰动，电子便改变了原来的运动方向。对于电子来说单缝只有一个扰动源，只改变运动方向、角度和相位。这种差别使得单缝衍射和双缝衍射明显不同，当我们在做双缝衍射实验，如果每次过一个电子时只开放一条缝，则始终只有一个扰动源，电子不存在可选择性，双缝衍射的条件被破坏，干涉条纹消失。

由此，我们真正认识了波粒二象性的本质。

电子的波动性是电子本身所具有的特性，因而用一个电子一个电子进行衍射和用许多电子同时进行，得到的干涉图样都是一致的。

电子本身的极点具有严格而清晰的传播轨迹，所以爱因斯坦是对的。如果我们能知道内禀场流形和背景场流形的所有边界条件，我们就能精确的确定电子极心的位置和速度，其轨迹由波函数(横波)准确描述。但另一方面，极点的轨迹却无法测量，因而边界条件永远是未知的。因为我们所用于感知世界的最精细的手段和工具是光子(或电子)进行测量，但这种粗笨的工具在接触到所测电子时，极点的位置受到了致命的扰动，使我们根本无法知道极点的轨迹，而我们永远也找不到比光子更精巧的工具！在这种万般无奈中，我们只好用统计的方式来表示电子行为，所以玻尔也是正确的。被测粒子存在轨道，若不进行测量我们对粒子处于无知的状态，而测量粒子的本身使我们虽然知道了 t 时刻粒子的位置，但测量扰动使我们对粒子的去向变得无知，这样我们便处于一种两难的境地。于是我们就把测量空间变得无限大，在一个足够大的区间中找到粒子的几率必定是 1。即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x,t)\right|^2 dx = 1$$

积分区$\int_{-\infty}^{\infty}$是这种两难境地的表述形式。

量子力学**假设**II

在假设 I 中提到的体系的可能状态构成了集合$L_2(-\infty,\infty)$，它由定义在$(-\infty,\infty)$上的能归一化的所有平方可积函数组成。

在假设 I 的基础上，进一步规定了波函数的性质，以假设 II 立即能得到极重要的线迭的定理。即体系在时刻t的两个可能状态的任意归一化的线性组合，其本身也是该体系在时刻t的一个可能状态。设$\Psi_1(x,t)$和$\Psi_2(x,t)$是两个运动学上可能的状态，于是若 C_1 和 C_2 是复数域中的两个数（与位置 x 和时间 t 无关的常数），且满足

$$\left|C_1\right|^2 + \left|C_2\right|^2 = 1 \tag{4-87}$$

那么

$$\Psi_3(x,t) = C_1\Psi_1(x,t) + C_2\Psi_2(x,t) \tag{4-88}$$

也是一个运动学上可能的状态。

在场流形中，粒子的波动轨迹使粒子具有了几率波的特性。极点轨迹是一维曲线Ψ，对于两个传播粒子来说，两个极化场极点相碰的可能性在低能下几乎为零，两条轨迹曲线是相互独立的。这种独立性的对于n条也成立，独立性的存在使得从统计的角度来看存在波函数的态的线性迭的原理，即（4-88）式。

量子力学**假设**III

有关体系的一切可能信息都包含在波函数之中，且可以通过一组适当的线性自伴算符把这些信息提取出来。设体系处于状态$\Psi(x,t)$，对它进行由算子A表示的物理量的测量，则得到值a_k的几率为$\left|C_k\right|^2$，这里a_k是A对应于本征函数$\Phi_k(x)$的本征值(在离散谱中)。

$$A\Phi_k(x) = a_k\Phi_k(x) \tag{4-89}$$

而C_k是用A在时刻t时的本征函数展开$\Psi(x)$时的系数：

$$\Psi(x,t) = \sum_l C_l\Phi_l(x) + \int C(\lambda)\Phi(\lambda;x)d\lambda; \tag{4-90}$$

类似地，对A的测量得到连续谱中$a(\lambda)$到$a(\lambda+d\lambda)$中的值的几率为$\left|C(\lambda)\right|^2$，这里$a(\lambda)$是$A$对应于不正规本征函数$\Phi(\lambda;x)$的本征值：

$$A\Phi(\lambda;x) = a(\lambda)\Phi(\lambda;x), \tag{4-91}$$

而$C(\lambda)$是$\Psi(x)$在时刻t的展开式(4-89)中$\Phi(\lambda;x)$前的展开系数。

说明：在假设III中，有关一切信息都包含在波函数中是因粒子波函数包含了粒子的纵横波信息，这可以从量子波特性第三章第一节中得知。这一假定所指的一切信息是指不考虑极化场内禀结构把粒子视为一个点粒子所具有的信息。

这一假设意味着，正好处在自伴算子A的一个给定的不正规本征态中的几率应为零。因此，根据假设 II，不正规本征向量就不是体系的可能态。然而，要注意的是作为不正规本征向量的连续的归一化的线性迭的波包是该体系的可能状态。

对于大量的全同体系的同时测量并不能能给出同样的结果。更确切地说，测量得到的a_k的几率$\left|C_k\right|^2$是随着a_k变化的。如图 4-19 所示的那样，只有当Ψ是A的一个本征态时，测量的结果才会是严格确定的。

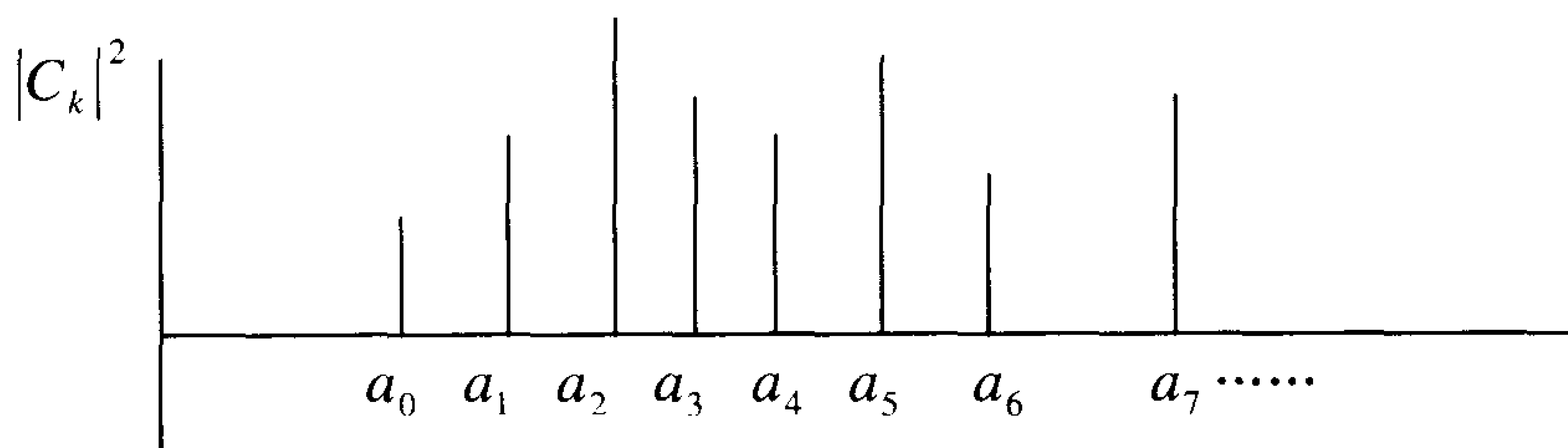


图 4-19　测量几率

上图为对大量的全同体系测量 A（具有纯离散谱的某个自伴算符）所得结果的可能分布，横轴为 A 的可能本征值，纵轴为发生的相对频率。

对于全同体系的大量同时测量，平均值或期待值 $<A>$ 由下式给出

$$<A> = \sum |C_k|^2 a_k + \int |C(\lambda)|^2 a(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) A \Psi(x,t) dx \tag{4-92}$$

量子力学**假设**Ⅳ

类似于经典力学的哈密顿(Hamilton)形式，在量子力学中表示动力学算是以下基本位置算符和动量算符的自伴算符函数：

$$\hat{x} = x \tag{4-93a}$$

$$\hat{p} = -ih\partial / \partial x \tag{4-93b}$$

它有完备的本征函数集(即可观察量)。

量子力学**假设**Ⅴ

量子体系的动力学由薛定谔(Schrodinger)方程

$$H\psi(x,t) = ih\partial\Psi(x,t)/\partial t$$

确定。在场流形中，量子力学假设Ⅳ和Ⅴ在量子波中已有讨论，是一种很自然的结论。

第十二节　极化场内禀空间与粒子表述空间的对应

在粒子内禀空间建立球坐标系，以极心为原点，考虑球坐标的 Φ 基向量（没有归一化），记为 $\vec{e}_\Phi$：

$$\vec{e}_\Phi = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \tag{4-94}$$

我们把这一向量记为 $\vec{e}_z$，$\vec{e}_z = \dfrac{\partial}{\partial \Phi}$，类假地定义 $\vec{e}_x$ 和 t_y，我们可以得到下面换位关系：

$$\left.\begin{aligned}[\vec{e}_x,\vec{e}_y]&=-\vec{e}_z\\ [\vec{e}_y,\vec{e}_z]&=-\vec{e}_x\\ [\vec{e}_z,\vec{e}_x]&=-\vec{e}_y\end{aligned}\right\} \tag{4-95}$$

由$\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$这三个向量确定了一个流形，因有三个向量，似乎表明这一子流形的维数是三维，即整个空间，但实际上，它是二维的。考虑到下步情况，我们就能更好地理解这点了。如果我们定义$r\equiv(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$则$\vec{e}_x(r)=\vec{e}_y(r)=\vec{e}_z(r)$，换而言之

$$dr(\vec{e}_x)=dr(\vec{e}_y)=dr(\vec{e}_z)=0 \tag{4-96}$$

我们把dr的图形看成是r为常数的曲面的集合，以及把dr与例如$\vec{e}_x$缩并，解释为$\vec{e}_x$穿过这种曲面的数目。我们看到(4-96)式意味着$\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$，$\vec{e}_z$都与r为常数的球面相切，所以在任意点上，它们是线性相关的。见(4-95)式，而且它们生成一个二维流形，自然这就是该球面，这个球面对应内禀场的等势球面。在$0<r<R$区间内禀空间有无穷多个二维流形构成内禀空间的场流形。

现在，我们来考虑整体粒子特性，首先来看粒子的自旋空间和粒子的同位旋空间。在量子力学中自旋和同位旋是基本粒子的两种自由度，由于对粒子内禀结构的不了解，对自旋的成因没有说明，仅是对粒子的自旋所表现出的特性加以表述，在量子力学中，我们是用一个线性厄密算符$\hat{\vec{S}}$来描写电子自旋角动量。按照角动量的一般定义，它满足如下关系式

$$\hat{\vec{S}}\times\hat{\vec{S}}=ih\hat{\vec{S}} \tag{4-97a}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{\vec{S}}_x\hat{\vec{S}}_y-\hat{\vec{S}}_y\hat{\vec{S}}_x&=ih\hat{\vec{S}}_z\\ \hat{\vec{S}}_y\hat{\vec{S}}_z-\hat{\vec{S}}_z\hat{\vec{S}}_y&=ih\hat{\vec{S}}_x\\ \hat{\vec{S}}_z\hat{\vec{S}}_x-\hat{\vec{S}}_x\hat{\vec{S}}_z&=ih\hat{\vec{S}}_y\end{aligned}\right. \tag{4-97b}$$

在第四章第六节中，我们谈到过电子自旋的单向性，由于静质量的存在，使得同一种电子具有两种自旋态$\pm h/2$，于是$\hat{\vec{S}}$在空间任意方向上的投影只能取两个数值$\pm h/2$，所以$\hat{\vec{S}}_z,\hat{\vec{S}}_y$和$\hat{\vec{S}}_z$算符的本征值都应该是$\pm h/2$，这里要引进一个$\hat{\vec{\sigma}}$算符，它与$\hat{\vec{S}}$算符的关系是

$$\hat{\vec{S}}=\frac{h}{2}\hat{\vec{\sigma}} \tag{4-98a}$$

其对应分量的关系为

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{\vec{S}}_x &= \frac{h}{2}\hat{\vec{\sigma}}_x \\
\hat{\vec{S}}_y &= \frac{h}{2}\hat{\vec{\sigma}}_y \\
\hat{\vec{S}}_z &= \frac{h}{2}\hat{\vec{\sigma}}_z
\end{aligned}\right\} \tag{4-98b}
$$

将(4-98a)式代入(4-97a)式，可以得到$\hat{\vec{\sigma}}$所满足的对易关系：

$$
\hat{\vec{\sigma}}\times\hat{\vec{\sigma}} = 2i\vec{\sigma} \tag{4-99a}
$$

写成分量的形式为

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x &= 2i\hat{\sigma}_z \\
\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y &= 2i\hat{\sigma}_x \\
\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z &= 2i\hat{\sigma}_y
\end{aligned}\right\} \tag{4-99b}
$$

在这里粒子内禀空间坐标基向量$\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$和整体粒子表述空间的泡利(Pauli)矩阵$\vec{\sigma}_x,\vec{\sigma}_y,\vec{\sigma}_z$具有相同的表述功效。用$\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$可以表述粒子内禀场流形的性质；而用泡利矩阵$\vec{\sigma}_x,\vec{\sigma}_y,\vec{\sigma}_z$则可以用于表述由不同种粒子组合而构成的粒子空间。令人惊讶的是粒子内禀场流形空间和整体粒子表述空间存在自相似性。粒子内禀场流形空间的性质会在整体粒子表述空间中表现出来。例如粒子内禀场流形空间为三维场流形空间，则存在三个维度的坐标基$\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$，在粒子空间则表现为同类粒子具有三种极化态：正极化态、反极化态和零极化态(即为局域平直场流形) 。极化场的三种形态表明场流形是一种物质形态，只有充满这种物质才有可能存在缺损态场质和游离态场质以及非缺损态场质。当然并不存在第四种态。这三种极化态对于最简单的极化场表现为e^+,e^0,e^-。这三种电荷性质可用整体粒子表述空间的同位旋概念来表述。即

$$
\left[I_j, I_k\right] = i\varepsilon_{jkl}I_l \tag{4-100}
$$

其中$I_i = \frac{1}{2}\tau_i \quad (i=1,2,3)$，$\tau_i$为 Pauli 矩阵，也可写为$\vec{\sigma}_i$。由场流形的性质同位旋 **I** 只能取0，$\frac{1}{2}$，1 三个值，分别对应$e^0$态，$e^+,e^-$态和$e^+,e^0,e^-$态，当同位旋 **I** 的取值超过可取值范围时，就失去了物理意义。

第五章　轻　子

第一节　e，μ，τ 的内禀结构

在第四章中，我们已经建立了三维极化场的基本概念及理论，现在我们来看极化场的具体表现形式。

极化场就是轻子，有三种质量态，分别是e，μ，τ。由极化场的纤维流形概念，我们知道极化场的总电荷为e。与内禀四动量无关。所以，e，μ，τ表现为质量不同电荷相同。但为什么会出现三个能级而不是连续变化呢？我们来看他们的内禀结构。

一、e的内禀结构

我们设想在平直流形中，多出或丢失基本单元的场质，便形成一对对偶极子，于是场流形向极心形变，刚好能恢复场流形的三维特性并形成局域协变流形时，为最低能态，即场流形能形成极化场的最小应变量。对于相同的背景流形来说，这是一个恒量。因而电子的静质量是一个恒量(低能情况)。在极心区和极点相邻的基本单元的场质，如图 4-16 中的 A（A 基本单元场质）在沿$\vec{r}$方向处于形变极限态，而 B 和 C 也为基本单元场质，但没有达到形变极限态。这是极化场的最低能态，所以是最稳定的结构态，只要极心场质缺少或多出基本单元场质，则电子就永远存在下去。电子沿$\vec{r}$方向的一维偏移量如图 4-18 所示。

$$p_e\Omega_e=\frac{3}{4}\pi(H/2)^3$$

$$\Omega_e=\frac{3}{4}\pi R_e^3$$

可见，电子的能级最小，但体积最大。R_e是电子内禀流形半径。

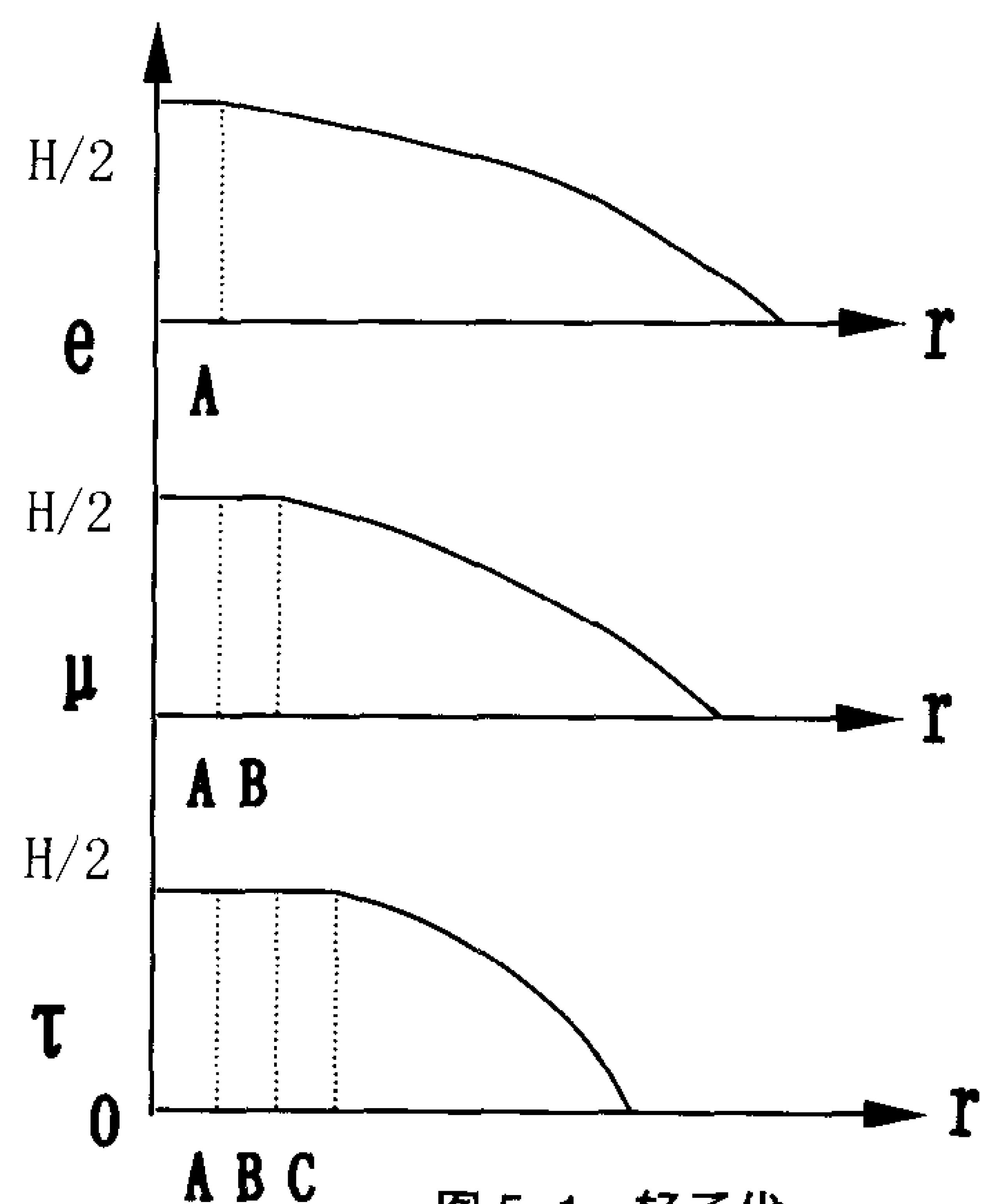


图 5-1　轻子代

二、μ 的内禀结构

对于 μ 来说，虽然极心得失同样是一基本单元场质，但内禀四动量比电子 e 大，对于极化场流形沿 $\vec{r}$ 向极心的形变率更大，除了和极点相邻的单元场质 A 达到形变极限外，第二级场质 B 也达到了场形变极限如图 4-16 所示，极心形变极限区变大，沿 $\vec{r}$ 的一维场偏移量如图 5-1 的 τ 所示，$R_\mu < R_e$，$\Omega_\mu < \Omega_e$，$P_\mu > P_e$，P 为四动量，Ω 为极化场内禀场流形区间。μ 轻子极心区域 A、B 两层基本单元场质都达到应变极限，内禀空间内场应变增加，μ 轻子传播能力大为降低，表现为静质量大为增加，$m_\mu = h_f / \Omega_\mu c^2$。

三、τ 的内禀结构

对于 τ 来说，情况和 μ 相似，第三层基本单元场质 C 也达到了形变极限，如图 4-16 所示，沿 $\vec{r}$ 的一维场偏移量如图 5-1 τ 所示，可见 A、B、C 都达到了形变极限。

这里要特别注意的是 A、B、C 的大小和 R 相比小得多得多，$l_A = l_B = l_c << R$，所以图 5-1 中所画的是夸大了的情况，目的为了使读者更容易理解。

在图 5-1 中，我们可以看出 A、B、C 分别为一基本单元场质，当 A 层达到应变量的极限，A、B 两层同时达到形变极限，以及 A、B、C 三层都达到形变极限时，并不影响极心区场纤的形成。对于基本单元的场质，维度是独立的，沿 x 方向的形变并不影响 y 和 z 维流形的性质，yz 维流形的形变极限由 yz 方向的形变决定。决定场纤流形的总量以性质最终是由极心场质得失的量决定。

综合上述，我们能理解为什么 e, μ, τ 具有相同电荷，相同自旋而质量却不同这一基本问题。

第二节　电场纤维

电场纤维就是我们熟知的纤维场流形，纤维场流形可由场论来表述，在电学中称电力线，由最基本的场论可，已知只量场 $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$，在 R_e 以外，设 $M(x, y, z)$ 为矢量线上的任意一点，其矢径为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

则微分

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

为点在 M 处与矢量线相切的矢量，按矢量线的定义，它必定与 M 处场的矢量

$$\vec{A} = Ax\vec{i} + Ay\vec{j} + Az\vec{k} \quad (5\text{-}1)$$

共线，因此有

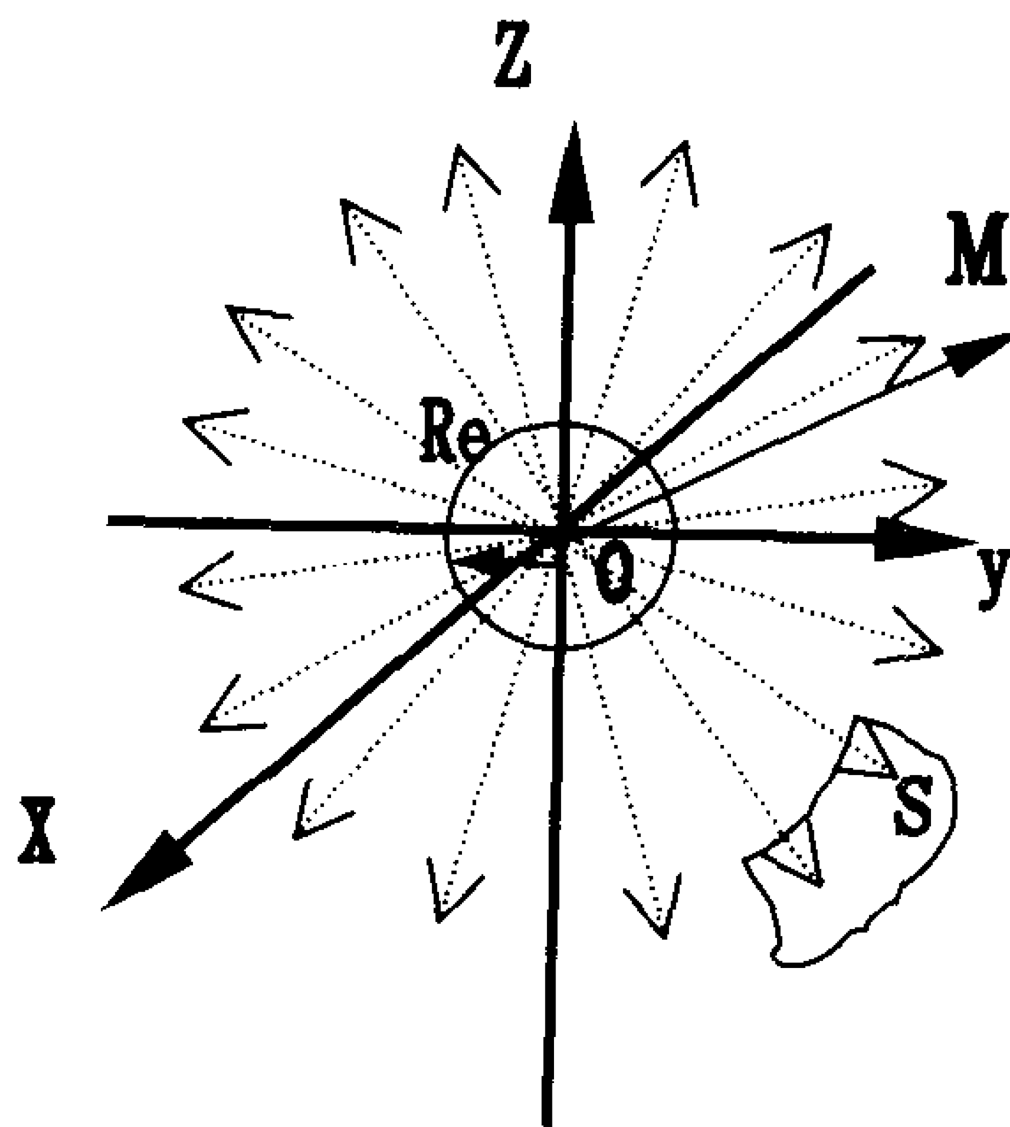


图 5-2　静电场

$$\frac{dx}{Ax}=\frac{dy}{Ay}=\frac{dz}{Az} \tag{5-2}$$

这就是矢量线所满足的微分方程。解之，可得矢量线族。即为上图所画的矢量线族，场纤是各向同性的。

$|Ax|=|Ay|=|Az|$ 具有相同的性质，设为

Ax，Ay，Az，A 为场参数, 则有 $\frac{dx}{Ax}=\frac{dy}{Ay}=\frac{dz}{Az}$

即 $$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z} \tag{5-3}$$

这就是场纤的数学表达式

电场强度：设穿过单位表面积 S 的场纤的数量为场密度。这个强度称为电场强度，用 $\vec{E}$ 表示。而总场纤数定为 e，总的封闭的球面积 $S_{球}=4\pi r^2$，那么 r 处的场强：

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi r^3}\vec{r} \tag{5-4}$$

这里，r 要大于 R_e，R_e 为纤维生成区的半径。$R \geqslant R_e$

当 $r < R_e$ 时，为场纤形成区。场纤数 $e(r)=k\cdot 4\pi r^2$，当球面越小，则场纤数就越少，参见图 4-15，所以在 R_e 以内，电场强度 E：

$$E=\frac{k4\pi r^2}{4\pi r^2}=k \tag{5-5}$$

在纤维生成区中，当 $r\to 0$ 时，E 不是无穷大，而是一个有限值 k，显然，库仑定律也只适用于 $r > R_e$ 的范围。

了解了场纤的结构，我们知道对于单根场纤无论场纤多长，场纤的总形变量沿 r 移动 ε，场纤的存在本身并不引起背景流形的变化，所以场纤本身是无质量的。换而言之，在强大的电场中时钟不会变慢。场纤的总数为 e，而每根场纤的移动量为 ε，ε 为填充真空间隙而发生场移动量。所以总的空穴的总量就是

$$e\cdot\varepsilon=\Omega$$

Ω 为空穴总量。对于场流形来说，Ω 就是基本单元场流形的量。轻子的质量是由轻子内禀空间场形变决定的，与场纤无关。

自旋被限制在内禀空间中，当从外部来看，不考虑点电荷内禀空间，$\vec{E}$ 是一个有源无旋的场。

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{5-6}$$

$$rotE=0 \tag{5-7}$$

第三节　自旋磁矩

一、磁　力

极化场场流形中存在电场纤维，而在极化场的内禀空间中又存在着自旋波，自旋量子波在有纤维结构的协变流形中传播使得纤维流形发生动态形变，这种形变产生一种力称磁力。现在，我们来分析一下磁力的成因。

我们考虑某一根电场纤维上的某点一基本单元的场质，有 x, y, z 三维场质，其中 x 维有一个小的移动，这便是电场纤维，如图 5-3(a) 所示。对于背景流形形变量小，x 维近似平直时，场纤 x 对 yz 的影响几乎为零。但当场纤 x 弯曲形变时，O 点基本单元场质就发生强烈的场形变，对 y, z 维的影响就表现出来。由于场形变是沿 y 维偏移，因而对 y 维的影响极小，又因内禀空间强烈地弯曲，所以 y 维场流形被封闭在极化场内禀空间中。只有 z 维表现出来，z 维出现一个极小的偏移，如图 5-3(b)所示，但比 x 维要弱得多。在半空间中，z 维没有对称性，只有一个方向，所以 z 的偏移对于同种极化场（同是正极化场或同是反极化场）只可能沿一个方向，而不存在两个方向，设这种偏移量向下，如图 5-3(b)、(c)所示。于是就形成了 z 场纤，这便是磁力线。和电场纤维不同的是由于在 z 维上没有场质得失，所以当 z 轴向下移 ε' 时，必然出现 ε' 的真空，如图 5-3(c)所示，必须由相邻场质的

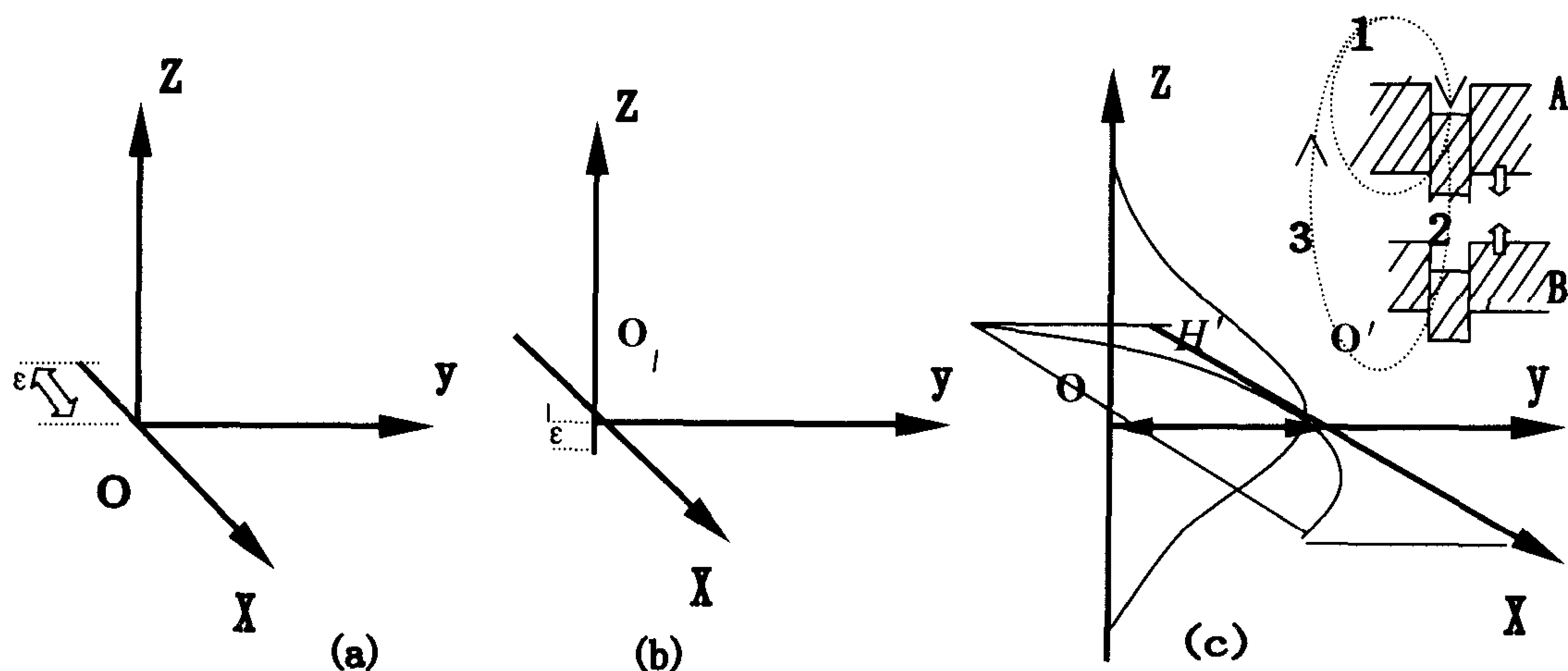


图 5-3　磁场纤维的形成

一维场质来填充，如比一直持续下去最终要形成一个封闭的场纤才能保持场质不出现场质缺损真空，所以磁场的场纤是封闭的，对于半空间来说，自旋也只有一种指向，当自旋相同时，且同是正极子（或同是反极子）时，如图 5-3 中 A，z 维向下移，B 也是 z 维向下移于是 A 和 B 为了恢复场的平直非真空态，出现了吸引力，这便是磁力。场纤走最近的路径耦合。在两磁体相遇时，由原来的单一磁体的磁力线路径 1 变为直接通过 2 的路径耦合，而通过路径 3 来构成封闭场纤，构成场流形的非真空态。显然自旋相反时，B 的下端和 A 的下端相遇，会加大场质的形变量，而出现斥力。

对于 o' 单元场质来说，场偏移量越大，o' 形变就越大，z 维的偏移量也就越大，磁力也就越强，自由量子波的偏移量最大为 H，但对于极化场来说，偏移量被压缩，极化场

四动量越大(即静质量越大)，偏移量 H' 越小。所以自旋量子波的偏移量只有通过比较，才能得到相对的偏移量 H'/H 。对于极化场来说，电力线总数为 e ，所以自旋波引起的磁力 $F_B = e \cdot H'/H$ 。

值得一提的是了解了磁场本质后，我们便知道磁单极根本不存在。

二、磁 矩

力矩为 $F \times \vec{r}$ ，那么磁矩就为（比如电子）

$$\mu_e = F_B \times \vec{r}$$

$$= e \cdot \frac{H'}{H} \times r$$

$$= e \cdot \frac{H'/t_h}{H/t_h} \cdot \frac{m_e}{m_e} \times t$$

$$= e \cdot \frac{p_e}{m_e \cdot c} \times r \qquad \text{，而} p \times r = \frac{1}{2}\hbar$$

$$\therefore \mu_e = \frac{e}{2m_e c}\hbar \tag{5-8}$$

第四节 轻子的麦克斯韦方程

认识了轻子的电磁场的场纤结构，我们可以用麦克斯韦方程来表述这种场流形的纤维场特性。麦克斯韦的标准形式 (c.g.s 单位制) 如下：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \tag{5-9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{5-10}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5-11}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5-12}$$

(5-9)式表明了电场纤维的分布形式，而电纤维的分布形式决定了库仑定理的形式。同时还表明了电荷的单极子存在。（5-11）式则否定了磁单极子的存在。(5-12)式对极化场而言(即对轻子)表达了磁场产生的机制，便有了自旋磁矩。$\vec{\nabla} \times \vec{E}$ 即 $\varepsilon_{lmn}\partial E_n / \partial x_m$ 是涡旋向量，由自旋造成的。 (5-10)式没有直接表述轻子内禀空间场纤的性质，但表述了内禀空间以外的宏观的场纤流形性质。方程(5-9)、(5-11)、(5-12)不仅表述了极化场场纤流形在轻子内禀空间的性质，还表述了内禀空间以外的宏观场纤流形的性质。

从麦克斯韦方程组得到的 3 维张量是：

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_k} = 4\pi\rho \tag{5-13}$$

$$\varepsilon_{ijk} \ \frac{\partial B_k}{\partial x_j} - \frac{1}{C}\frac{\partial E_i}{\partial t} = \frac{4\pi}{C} J_i \tag{5-14}$$

为了把这些方程用协变形式重新表述出来，我们引入了 4 维流密度向量

$$J_u(\vec{j},\ ic\rho) \tag{5-15}$$

以及 4 维 2 阶电磁场强张量

$$F_{uv} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{5-16}$$

应用 4 维流密度 J_u 以及 4 维电磁场强度张量 F_{uv}，我们可以把麦克斯方程重新表述为两套各有 4 个方程的方程组：

$$\frac{\partial F_{uv}}{\partial x_v} = \frac{4\pi}{C} J_u \tag{5-17}$$

$$\frac{\partial F_{uv}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda u}}{\partial x_v} + \frac{\partial F_{v\lambda}}{\partial x_u} = 0 \tag{5-18}$$

它们是明显协变的。

静磁场是一个有旋无源的场，$div\vec{B} = 0$，我们用通常的方式引入一个矢势 $\vec{A}$，使得

$$\vec{B} = curl\vec{A} \tag{5-19}$$

上式代入(5-12)式中，有

$$curl[\vec{E} + (1/c)\partial\vec{A}/\partial t] = 0 \tag{5-20}$$

因此，我们又引入一个标势 Φ，使得

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{5-21}$$

应用这些定义和下列关系：

$$(\vec{\nabla}\times)(\vec{\nabla}\times) = curl \cdot curl = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot) - \nabla^2 \tag{5-22}$$

$$(\vec{\nabla}\times)\vec{\nabla} = curl\ \ grad \equiv 0 \tag{5-23}$$

和

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -4\pi\rho \tag{5-24}$$

和

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{5-25}$$

(5-24)式(5-25)式并不能唯一地决定势 $\vec{A}$ 和 Φ，于是为了符合物理观测，我们只考虑那些满足下列洛伦兹规范条件的势：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\quad\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$

只考虑上述条件后，我们可以把麦克斯韦方程(5-24) 、(5-25) 重新表述为下列特别简单的且有明显协变形式：

$$\vec{\nabla}^2\Phi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho \tag{5-24a}$$

和

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{5-25a}$$

这是 4 个带有非齐次源项的波动方程，它们的解由规定的电荷和电流密度分布，得到势 $\vec{A}$ 和 Φ，再依次由它们得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$，引入下列 4 维势：

$$A_u=(\vec{A}\ ,\ i\Phi) \tag{5-26}$$

我们可以得到明显的协变性，场 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 是用势 $\vec{A}$ 和 Φ 通过下列 4 维 2 阶反对称张量

$$F_{uv}=\frac{\partial A_v}{\partial x_u}-\frac{\partial A_u}{\partial x_v} \tag{5-27}$$

来决定的。此洛伦兹条件变为 4 维势的散度为零：

$$\frac{\partial A_u}{\partial x_u}=0 \tag{5-28}$$

而联系势及其电荷－电流源分布的 4 个波动方程(5-24a)和(5-25a)可由以下协变关系：

$$\frac{\partial^2 A_v}{\partial x_\lambda\partial x_\lambda}=\square \qquad\qquad A_v=-\frac{4\pi}{c}J_v$$

紧凑地表达出来。

构成 4 维电磁场强张量与其自身的张量积，我们就得到 4 维 4 阶张量 $F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}$。把这个张量对于 k 和 λ 以及 μ 和 ν 缩并，就得到下列标量

$$F_{kv}F_{k\nu}=2(\left|\vec{B}\right|^2-\left|\vec{E}\right|^2)$$

因此，磁场能量密度与电场能量密度之间的差 $(\left|\vec{B}\right|^2-\left|\vec{E}\right|^2)/8\pi$ 是一个相对论不变量。

这里所谈及到的电磁场能量密度在场流形理论中并无这一概念，只存在电磁场场强密度，因为电磁场纤本身并不引起三维场流形形变，所存在的仅是维度上的偏移，所以场纤本身无能量可言。电子在电磁场中获得能量仅是电子本身的势能转换为动能的过程。电磁场能量密度表征了电荷在电磁场中势能转换为动能的效率。

第五节 电磁耦合常数

在统一场流形理论中，我们可以根据场流形的原理来理解耦合常数的物理意义，并可根据这一物理意义来估算电磁耦合常数的大小。现在我们来看一个很典型的例子：考虑图

5-4 光子对电子的汤姆逊(Thomson)散射。对于长波长的光子，截面为

$$\sigma_{TH}=\frac{8\pi}{3}(\frac{\alpha}{m_e})^2=\frac{2}{3}\alpha^2(4\pi R_e{}^2). \qquad (5\text{-}29)$$

式中 R_e 是电子的 Compton 波长(自然单位制)，

$$R_e=\frac{\hbar}{m_e c}=\frac{1}{m_e}$$

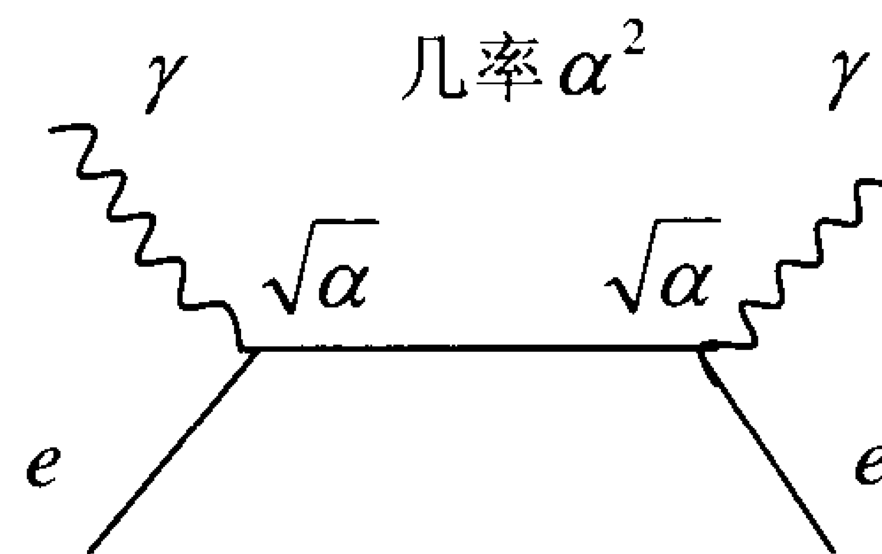


图 5-4　Thomson 散射费曼图

在场流形理论中 R_e 就是极化场内禀空间半径，**这表明我们所定义耦合常数只适用于纯极化场**。汤姆逊散射截面可以用 QED，也可以用经典电动力学的方法得到。在长波长的光子散射实验中，电荷的值就是在大距离(低能)下探测的结果。我们知道在场流形理论中，极化场静质量与内禀空间大小成反比。为了便于理解耦合常数的物理意义，我们假设光子和电子耦合常数若为 1，则表明光子只要进入电子内禀空间(电子球形内禀空间的半径为 R_e)，光子就会和电子发生相互作用而发生偏转。换而言之光子只要进入电子的内禀空间，光子就放射虚光子(纵光子)与电子作用，这样的概率为 1。理解了 1 的概念，我们就对耦合常数有了直观的理解。实际的情况是光子和电子耦合的耦合常数是 $g_e=1/137$，是一个很小的量，那么为什么会如此之小呢？现在我们从场流形角度来分析这一问题。

一、考虑电子的情况

电子场流形存在纤维结构，于是我们从电场纤维的角度来看问题。光子和电子作用本质是光子的灵点通过某根电场纤维由电场纤维诱导的一维场流形和电子极点相耦合而交换能量发生汤姆逊散射。光子是玻色场，所以当光子的灵点进入到电子的内禀空间内不一定能发生相互作用，对于单电子来说要满足以下几个条件这种耦合才能发生。① 必须存在场纤；② 光子的灵点要进入电子的内禀空间内；③ 进入内禀空间之后，存有利于动量(纵光子)传递的角度。

现在我们根据上述想法来估算一下光子灵点进入电子内，极点和灵点通过场纤进行耦合的概率。设光子从左至右进入电子的内禀空间(如图 5-5 所示)。(a) 电场纤维要锁定光子的灵点，则显然右半球的场流形不能锁定光子灵点，而只有左半球内的场纤存在锁定光子灵点的可能性，这样就只有 1/2 的场纤有可能。(b) 对于场纤来说，基本单元场流形为三维，其中只有一维场流形能形成场纤，于是灵点和极点耦合通道不是三维而仅仅只有一维。当三维均参加耦合传递，则通道的宽为 1，所以现在的通道宽度为 1/3。(c) 在这场纤中，当光子的灵点刚好进入电子内禀空间的那一点和极点的连线与轴线构成的角度为 θ，如图 5-5 所示。θ 值越小的场纤锁定光子灵点的可能性越大，换而言之，θ 值越小则越有利于光子传递动量，所以还要考虑有效值的因素，对于左半球有效平均值如下估算：单电子内禀场流形内的场纤长度为 R_e，则有效场纤应为 $R_e\cos\theta=\rho$，ρ 绕 x 轴转动而构成的面即有效面 $\bar{S}$，所以

$$\bar{S}=k\cdot 2\pi\int_0^{R_e}\rho ds=2\pi k\int_0^{R_e}y\sqrt{1+y'^2}dx \qquad (5\text{-}30)$$

其中

$$\rho=r\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ x=\rho\cos\theta,$$

$$dy=\frac{1}{2}R_e\cos 2\vartheta\cdot 2d\theta \qquad dx=-2R_e\cos\theta\sin\theta$$

$$y'=dy/dx=\frac{-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}, \qquad \sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{\sin 2\theta}$$

代入(5-30)，有

$$\bar{S}=2\pi k\int_0^{\pi/2}R_e\cos\theta\sin\theta\sqrt{1+y'^2}\,2R_e\cos\theta\sin\theta d\theta=k\pi\int_0^{\pi/2}R_e^{\ 2}\sin 2\theta d\theta$$

$$=\pi R_e^{\ 2}$$

$$\text{有效值}=\frac{k\bar{S}}{kS}=\frac{\pi R_e^{\ 2}}{2\pi R_e^{\ 2}}=\frac{1}{2}$$

S 为总面积，即半球面积。

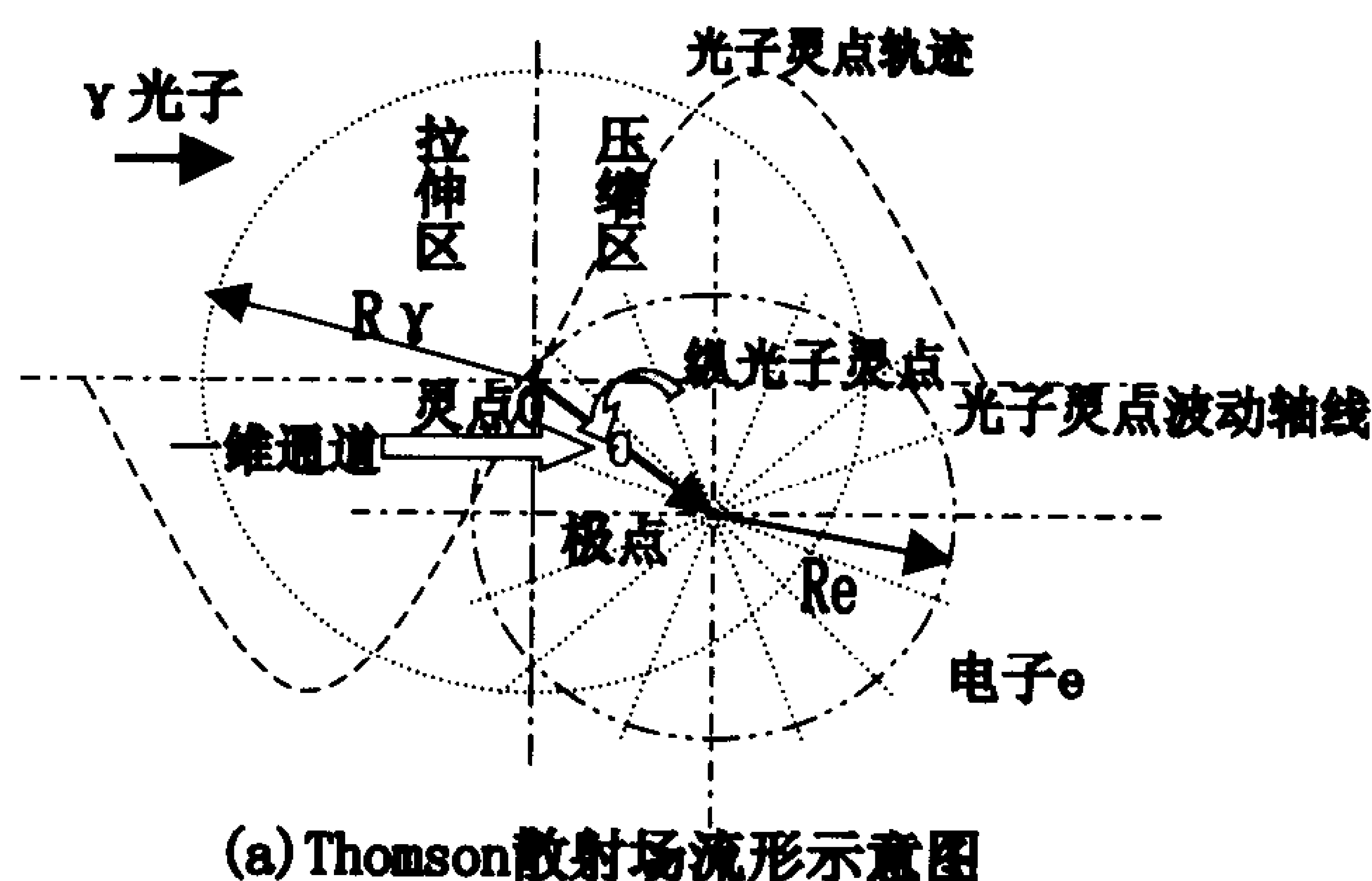
综合上述(a), (b), (c) 三点，对于单个电子场纤有效锁定光子灵点进行耦合的概率就为

$$e=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

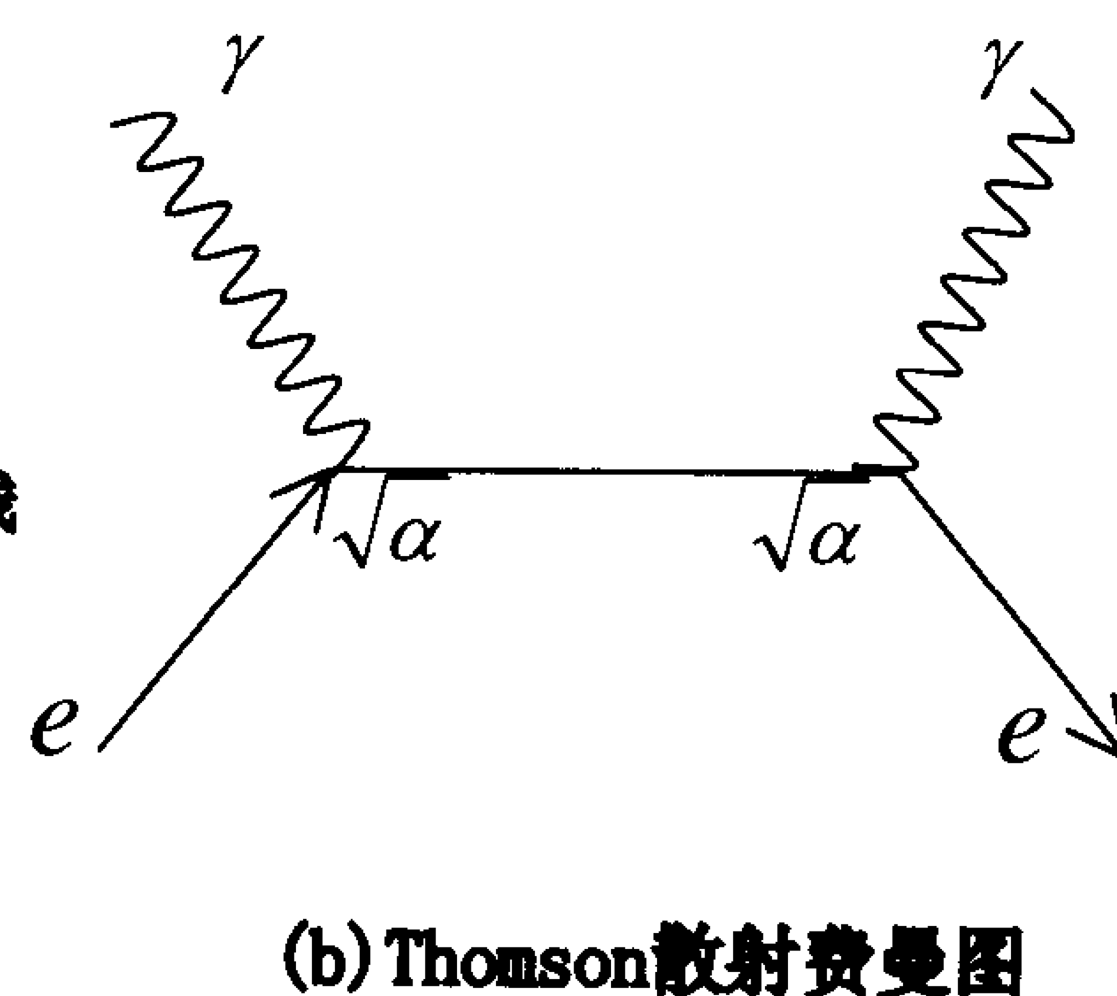
而实际的实验值为 1/11.705。可见这种估算是很接近的。

二、光子的情况

对于光子，情况和电子很类似。不同的是光子本身场纤结构与电子有所不同，光子的内禀纤维流形在压缩区则形成压缩场纤；在拉伸区则形成拉伸场纤。光子场纤(无论是压缩或拉伸场纤)和电子的电场纤维耦合而形成灵点和极点之间的一维场流形通道交换纵光子。纵光子的灵点沿一维场流形通道进行传输而实现光子和电子之间的四动量传递。



(a) Thomson散射场流形示意图



(b) Thomson散射费曼图

图 5–5

从图 5-5(a) 可以看出，当只考虑光子γ时，光子由左进入右边，对于光子的内禀场流形来说，只考虑压缩区这一半场流形，这一半场流形才有可能形成一维场流形通道。当光子的灵点进入到电子内禀流形边缘(即 R_e 处)，一维场流形通道才能形成，这种通道效应对于光子来说在光子内禀流形(R_r 以内) 才能产生。和电子分析中(a) 、(b) 、(c) 三点的分析一致，我们从两方面来考虑：一方面是光子的场纤数和电子的场纤数完全相同，若任

何一根场都能形成一维通道，那么光子形成一维通道的概率和电子的情况完全相同。因而光子形成一维场流形通道的概率为：$\sqrt{\alpha'}=1/12$ ，光子和电子相耦合就是光子和电子形成一维场流形通道概率之积，于是有$\alpha=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha'}=1/144$。但从另一方面来看，我们还要注意的是光子形成一维通道的概率和电子有所不同。因为光子为量子波，量子波灵点在与传播方向垂直面的附近场纤应变极小，与灵点相交的垂直面yz面上场纤应变为零，参见图 3-1。由于这种差异，使得光子的有效场纤比电子的要少。光子的有效场纤的总应变量为$\hbar$，而电子有效场纤的总应变量为h_f。因而我们可得到光子有效场纤和电子有效场纤的比值 $k=\hbar/h_f=0.9017$，光子形成有效一维场流形通道的概率就是：$\sqrt{\alpha'}=1/12k=1/10.8204$，光子和电子相耦合，是光子和电子形成一维场流形通道概率之积，所以光电耦合常数(即概率)为$\alpha=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha'}=1/130$。

综合上述两方面的情况，我们可以得到α值介于$1/144\sim1/130$之间，取中间值有

$$\alpha=1/137 \tag{5-31}$$

和实测值$\alpha=1/137$是一致的。当然这种估算是很近似的，对于光子形成场纤道通的场纤量还应该多考虑一些因素，包括微小应变场纤的定量效应，以及耦合常数的定义。这样光子场纤和电子场纤耦合的概率的计算会更可靠一些。

三、光电耦合不同于电磁场

这里我们要特别注意电子 $e=1/11.7=\sqrt{\alpha}$ 和单电子电荷是两个不同的概念。现在我们所谈及的 e 指的是进行粒子散射时，如汤姆逊散射时，电子所表现出的特有的和光子耦合性质的强弱。电子的电量指的是电场纤维的数量，纯电磁场作用是场纤分布不均的纤维场之间的相互作用，为静电场，是远距离行为而电磁耦合是近距离作用。这和粒子电磁耦合散射的作用并非一回事。光子虽为纤维结构，但并无电荷，因而静态的电场和磁场对光子无影响，在从前的物理学中光子和电子之间的相互作用被认为是纯粹的电磁作用，而实际的情况并不是纤维场作用而是光子内禀流形和电子内禀流形通过一维通道相互作用，表现为灵点和极点之间的作用。

四、耦合常数α与质量的无关性

从前面我们知道耦合常数是光子形成一维场流形通道和电子形成一维通道的概率之积，但是这种概率和场纤量成正此，在前面分析(a) 、(b) 、(c) 的所有估算中，均与极化场质量无关，而只与场纤有关，对于光子来说一维通道是由电子场纤诱导的，所以只与场纤量有关。因而e,μ,τ的耦合常数是相同的。α与质量无关，而只与电荷质有关，这在场流形中，这是一个自然的结论。

五、通道效应与费曼图

光子和电子作用通过一维场流形通道进行的，这种一维通道效应正是耦合常数的本质所在，也正是因为这种一维通道特性的存在使得费曼图得以成立，并能被QED作精确表述。图 5-5 中的(a)和(b)在本质上是完全等价的。

通道效应是一种量子场流形相互作用特有效应。对于场流形来说，当大范围发生微小应变时，我们可以用爱因斯坦的广义相对论来表述。用同样的逻辑，我们在描述两个量子场流形相互作用时，应该可以用弹性应变理论来表述，实际的情况是由于存在通道传输效应，使得应变理论在这一微观量子领域失效，应变理论不能再表述这种相互作用，取而代之的是现代的量子场理论。我们可以这样认为一维通道效应是微扰理论的基础，有这一特性才使得计算得以成立。

第六节　轻子的狄拉克方程

对轻子的内禀结构了解之后，我们来简单的看一下量子场论对轻子的表述。量子理论是在我们对轻子内禀结构一无所知的前提条件下对量子场进行描述的。我们所知到的是作为一个完整的粒子所表现出的基本的外部特性。具体归纳为：轻子具有质量、电荷、自旋，存在正反轻子。对轻子的这些外部特征进行描述，我们先不求知到为什么，重要的是把所有的特性归入一个方程。狄拉克(Draic)做到了，且做得非常优美。在这里，我们并不推导狄拉克方程，每本场论书都有详细的推导。直接把自由狄拉克方程写出

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = 0 \tag{5-32}$$

其中 $p^\mu = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$，为自由电子的4动量，其4分量波函数 $\psi = u(\vec{p})e^{-ip.x}$。[采用泡利(Pauli)度规和自然量纲，自由狄拉克方程可写为 $(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi = 0$]

这里，从场流形论的角度来看，我们感兴趣的是在狄拉克方程中引入的 γ_μ 张成了一个粒子表述空间。γ_μ 在粒子表述空间为全向空间。

$$\gamma_j = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad \gamma_4 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix} \qquad j = 1,2,3$$

狄拉克方程具有正洛伦兹不变性和空间反演不变性，所描写的正反粒子其自旋态均有两种 $\pm 1/2$ 态。狄拉克方程预言了反粒子的存在，并提出了电子的“空穴”理论。

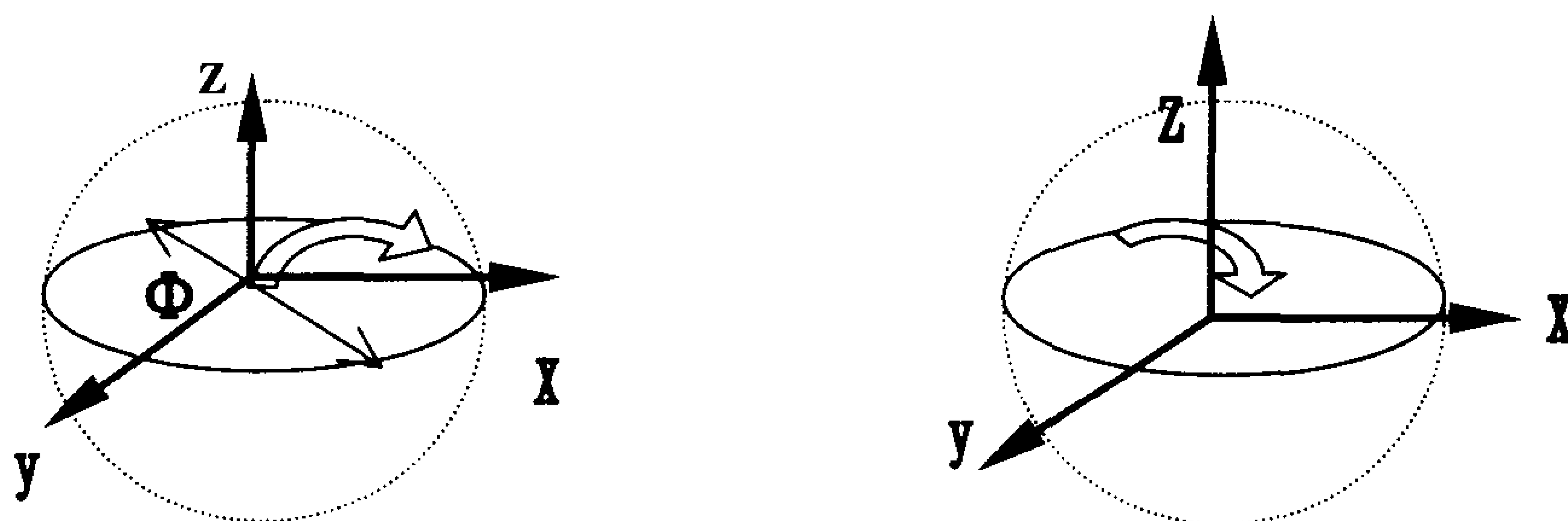
第七节　中 微 子

一、中微子的内禀结构

中微子是二维极化无静质量极化场，这种特殊的场流形是自旋波的另一种表现形式，现在我们来具体地来看一下其内禀结构，如图 5-6 所示。

如图 5-6 所示，自旋波的传播轨迹是在一个二维面上，自旋波相对于极心向内或向外，造成了二维极化场的形成。这里要特别注意一点：对于中微子左旋或右旋并不重要，重要的是自旋波是向内还是向外。向内则形成压缩二维压缩极化场，向外则形成拉伸二维极化场。这和以前中微子是左旋而反中微子为右旋的概念是大不一样的。这种极场和前面谈到

过的三维极化场有两点明显不同，一是维度不相同： 二维极化场比三维极化场少一维；其二是二维极化场无场质失，这样没有电荷出现。



(a)自旋波由极心向外传播，拉伸 x-y 面的场流形成二维极化场

(b)自旋波由极心向内传播，压缩 x- y 的二维场流形形成二维极化场

图 5-6 中微子的结构

现在我们来把问题再简化一下，考查图 5-6(a) 中的Φ，即沿直径Φ的一维场流形结构，我们先不考虑自旋波的动态影响，只考虑自旋波带来的静态效应。图 5-7 所示:

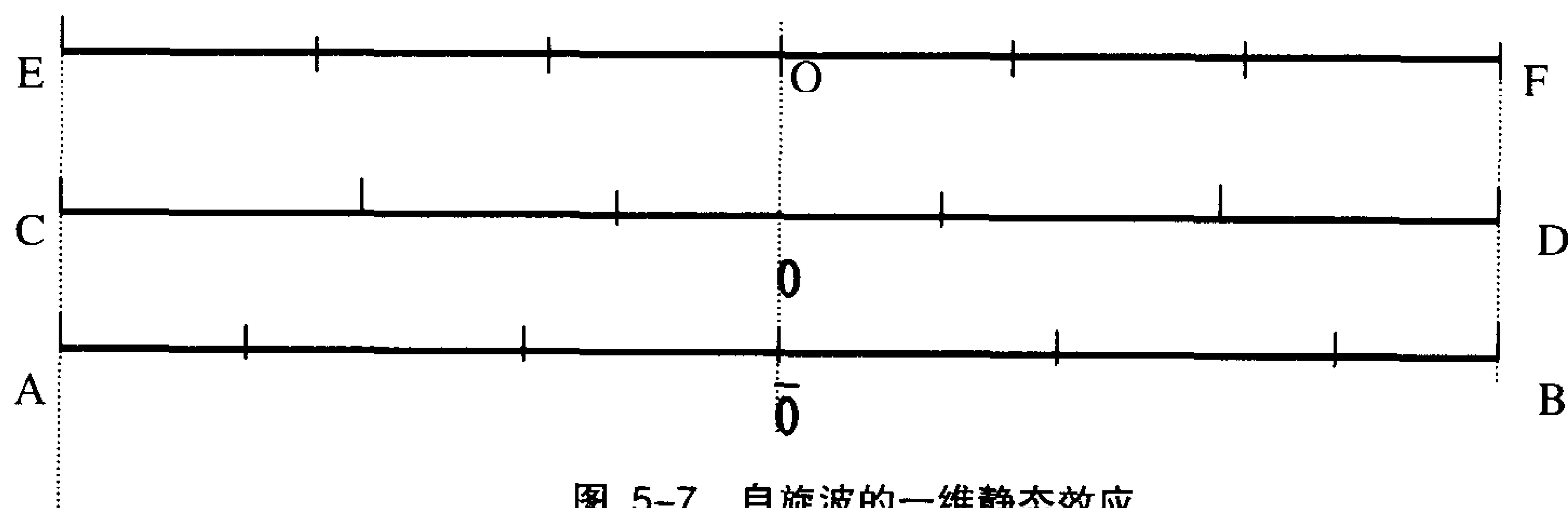


图 5-7 自旋波的一维静态效应

沿Φ的一维场流形结构如图 5-6 所示。EF 为平直一维场流形，被压缩后形成一维压缩极化场 CD。CD 是非均匀的场流形，靠近极心的场被压缩，而在 CD 端则被拉伸，形成极心场密度大，而边缘处场密度疏的量子场。和压缩极化场相似，形成特殊的压缩场。EF 拉伸后形成一维拉伸极化场 AB。情况和 CD 正好相反。一维极化场在二维面绕 O 点转动 π 便构成了二维静态极化场。压缩极化和拉伸极化场一样大，即 CD=EF=AB，这样二维极化场对内禀空间以外的场流形并不造成响，或者说对外部流形的影响几乎不存在，由于场应变很小，因而引力质量几乎为零。我们定义 EF 长为二维拉伸或压缩极化场内禀空间的直径Φ。Φ满足极化场特有的关系式 $p\cdot\Phi/2=H$。二维极化场的极心达到形变极限，因而 xy 面上存静质量，这种二维静质量等于二维场形变率。 在 z 方向没有场形变，当然也就没静质量。极化场运动是极化场和量子波耦合产生的效应，而耦合总是沿极化场应变量最小的方向，因而运动总是沿 z 轴方向。对于我们的观测来说总是在 z 轴方向，而不可能在 xy 面上来研究二维极化场，所以对于我们的观测来说二维极化场没有静质量。实际的情况是中微子有很小的静质量，静质量分 xy 和 z 的两部分构成，其总量等于自旋波的总能量。

中微子有三种 ν_e,ν_μ 和 ν_τ。这是由于自旋波能量不同而造成的。最初还是来自于极化场的极化度不同，即由 e,μ,τ 的极化度不同而对应不同的相应的自旋波，从能量最低态为最稳定态的角度来看 ν_μ 和 ν_τ 应该会释放能量变为低能态的 ν_e。

了解了中微子的内禀结构，我们便知道中微子的本质就是纯态自旋波，显然没有自旋波也就没有中微子的存在。在二维面上中微子具有半空间效，且对于观测沿 z 轴不存在静

质量。这样微子沿内禀 z 轴方向传播时，传播速 c，即为光速。在这里自旋波向内所构成的中微子和以前概念的右旋反中微子对应，为反半空间；而自旋波向外所构成的中微子则和以前概念的左旋中微子对应，为正半空间。与自旋波的左或右无关。这和我们以前的概念是大不一样的，在场论中，我们把自旋波的正反半空间特性错误地理解为是自旋波的左右旋特性。

二、中微子的粒子表述

中微子理论的特性是：无静质量，且它破坏了空间反演和电荷共轭变换下的不变性(我们知道，$m \neq 0$ 的 Dirac 理论在这两种变换下均具有不变性)，这种特点是由中微子半空间特性所造成的。这一特点反映在理论的形式上，便是在理论里出现 γ_5 矩阵，因而中微子态和反中微子态具有所谓“手征性”。理论的上述特点引出了第二个特点：即中微子、反中微子波函数不再具有四个独立的分量，而只有两个独立的分量。采用泡利度规。

中微子无静质量，可从 $m \neq 0$ 的狄拉克理论过渡到中微子理论。当 $m = 0$ 时，狄拉克方程简化为

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \tag{5-33}$$

左旋态与右旋态 $\pm\gamma_5$ 左乘(5-33)，并将所得式与 (5-33) 式相加，再乘以 1/2 便得到下式

$$\gamma_\mu \partial_\mu \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi(x) = 0 \tag{5-34}$$

令

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \tag{5-35a}$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi, \tag{5-35b}$$

则不难看出，$\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 都是 γ_5 的本征态，其手征性分别为 $+1$ 和 -1：

$$\gamma_5\, \psi_L(x) = \psi_L(x), \tag{5-36a}$$

$$\gamma_5\, \psi_R(x) = -\psi_R(x) \tag{5-36b}$$

$\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 所描写的态分别称为左旋和右旋态。这是因为当它们都是方程(5-34) 的正能解时，$\psi_L(x)$ 描写左旋粒子，$h = -1$；$\psi_R(x)$ 描写右旋粒子，$h = +1$。按照中微子的实验事实，可取 $\psi_L(x)$ 为中微子波函数，对应场流论中自旋波外；$\psi_R(x)$ 为反中微子波函数，对应场流论中自旋波内。我们看到，$m \neq 0$ 的狄拉克粒子的波函数 $\psi(x)$ 可以分解为 $\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 之和：

$$\psi(x) = \psi_L(x) + \psi_R(x) \tag{5-37}$$

当 $m \neq 0$ 时，上式的分解不具有洛伦兹不变性，这是因为 $m \neq 0$ 的狄拉克粒子有两种纵向极化态，左旋态和右旋态，而当 $m = 0$ 时，粒子只有一种纵向极化态，左旋态和右旋态，因而(5-34) 式的分解具有洛伦兹不变性。

P 破坏和 C 破坏 在二分量中微子理论里出现 γ_5 矩阵，使得理论不再具有空间反演不变性。对 $\psi_L(x)$ 和 $\psi_R(x)$ 分别进行空间反演：

$$P\psi_L(x)=\gamma_4\psi_L(x)=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi'(x')=\psi'_R(x') \ , \tag{5-38a}$$

$$P\psi_R(x)=\gamma_4\psi_R(x)=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi'(x')=\psi'_L(x') \tag{5-38b}$$

这一结果表明，一个左旋中微子的镜像是一个右旋中微子；而一个右旋反中微子的镜像则是一个左旋反中微子。但是这些镜像粒子都不存在，所以二分量理论不具有空间反演不变性。顺便指出，在场论中正是由于中微子和反中微子都只具有一种螺旋态(纵向极化态)，因而在弱作用过程里，宇称守恒定律不再成立。而在场流形中，只要涉及到半空间弱场流形，都存宇称不守恒。

二分量理论同样破坏了电荷共轭对称性：

$$\psi_L^C=C\overline{\psi}_L^T=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^C \tag{5-39a}$$

$$\psi_R^C=C\overline{\psi}_R^T=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi^C \tag{5-39b}$$

由此不难验证：$\gamma_5\psi_L^C=-\psi_L^C$

$\gamma_5\psi_R^C=\psi_R^C$

把上二式与(5-36) 比较可知，在电荷共轭变换下，$\psi_L(x)$ 与 $\psi_R(x)$ 的手征性互换。因此，电荷共轭变换的结果是：粒子与反粒子交换而螺旋度不变,这显然破坏了电荷共轭对称性。

在场流形理论中，CPT（电荷、空间、时间）联合反演守恒有着很明确的物理意义，就是场质守恒，即在一个封闭的含有相互作用区域或一对耦粒子以及某衰变粒子区域 Ω 内拉伸场流形的总应变量恒等于压缩场流形的总应变量。

第六章　光　子

第一节　四维矢量势及其规范的选择

光子就是纯态的三维量子波。量子波的结构在第三章已经讲过。当极化场振动时，极心为一个点，场流形中的点沿振动方向的场形变超过$\hbar/2$时，量子波开始产生。这是极化场特有的波。量子波为纯场纤结构场流形，被封闭在内禀空间内，由于拉伸场纤严格等于压缩场纤，且并无真正意义上的自旋，当然也就测不出存在电场和磁场效应。这一点和经典的麦克斯韦理论是不完全一样。量子波有场纤结构，传递的是纯能量形式。量子波只能由极化场的极心振动才能产生出来。因此光子也只能与极化场极心进行耦合，换而言之，光子的灵点只能同极化场的极点耦合。由于所有的极化场都带电荷，因而我们以前的经典理论误把光子认为是由交变电场和磁场构成的电磁波。这种观点在场流形理论中是不成立的。

光子的灵点轨迹是横波。为了描述光子的表现特性，光子的偏振方向需要用一个矢量波函数来描述。为了满足狭义相对论的要求，这个矢量波函数应该是一个四维矢量场空间部分

$$(A_\mu)=(\vec{A},\ i\Phi),\quad \mu=1,2,3,4. \tag{6-1}$$

对于光波在空间自由传播的情况，这个四维矢量的每一分量应满足以光速c传播的波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial t^2}-\nabla^2 A_\mu=0 \tag{6-2}$$

习惯上把$\vec{A}$称为矢量势或矢势，把Φ称为标量势或标势。实际上，自由光波的偏振方向只有 2 个自由度，所以这 4 个分量并不完全独立，还要满足一定的附加条件。满足狭义相对论要求的条件可写为

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \tag{6-3}$$

这个条件称为洛伦兹条件，它相当于四维矢量场A_μ选择一定的规范。这种具有一定规范任意的场可以称为规范场。而对它选择的附加条件称为规范条件。

除了上述洛伦兹条件外，还可以选择别的规范条件。对于自由传播的光波，常用的一个规范条件是

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{A}=0\\ \Phi=0\end{cases} \tag{6-4}$$

上式可以理解为光子不存在极心和电磁结构。这个条件称为库仑规范或辐射规范。把自由传播的平面光波

$$\vec{A}(r,t)=\vec{A}_0 e^{i(k\cdot r-\omega\cdot t)} \tag{6-5}$$

代入条件$\nabla\cdot\vec{A}=0$，可以得到

$$\vec{k}\cdot\vec{A}=0 \tag{6-6}$$

它表明在辐射范场中，标势等于0，而矢势 $\vec{A}$ 的振动方向 $\vec{A}_0$ 与光波传播方向 $\vec{k}$ 垂直。这里可以看出 $\vec{A}$ 的引入是专门用于描述光波横波特性的。因而，在辐射规范中，可以用矢势的方向来描述光的偏振方向。

第二节　光子自旋及偏振

一、光子的角动量

在辐射规范中，矢量势 $\vec{A}(\vec{r},t)$ 与光的传播方向 $\vec{k}$ 垂直，它的方向也就是光的偏振方向。如果把 z 轴取在光的传播方向，矢量势 $\vec{A}(\vec{r},t)$ 就只有 $\vec{A}_x(\vec{r},t)$ 和 $\vec{A}_y(\vec{r},t)$ 两个分量。

$$\begin{cases} A_x = A\cos\Phi \\ A_y = A\sin\Phi \end{cases} \tag{6-7}$$

其中 Φ 是该点矢量势的幅角。

另一方面，任一方向的线偏振光也可分解成一个左旋圆偏振光 A_L 和一个右旋圆偏振光 A_R 的叠加。

$$\begin{cases} A_L = Ae^{+i\Phi} = A_x + iA_y \\ A_R = Ae^{-i\Phi} = A_x - iA_y \end{cases} \tag{6-8}$$

为了看出它们的旋转性质，只要写出波函数的时间因子 $\exp\{-i\omega\cdot t\}$。这时 A_L 与 A_R 的相位分别为 $\Phi-\omega t$ 和 $\Phi+\omega t$，随着时间 t 的增加，光沿 z 轴传播，相位相同点的幅角增加（左旋）或减少（右旋）。

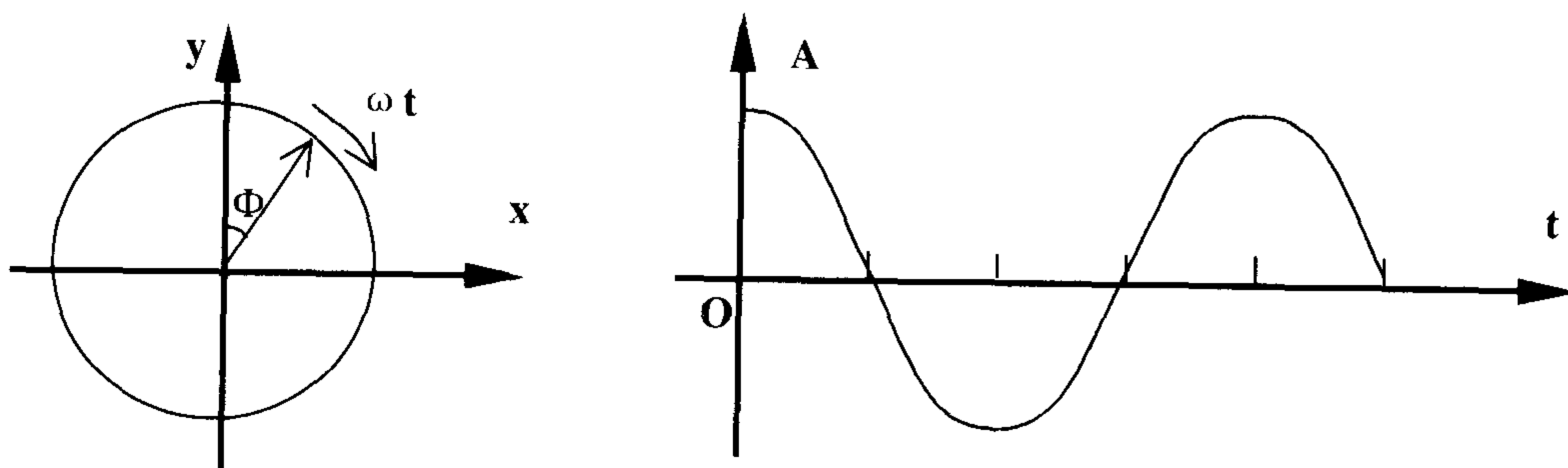


图 6-1　光子自旋

在一个周期 $T=2\pi/\omega$ 里，矢量势转过 2π 幅角。

就单一光子而言，光子的灵点在沿传播方向 z 相互垂直的方向上的某一平面上作振动。随着时间的增加，$+\omega t$ 相位幅角的增加，增加 2π 幅角，灵点振动一个周期，可以看成光子沿 z 轴正向传播。反之，$-\omega t$ 则光子沿 z 轴反向传播。

要特别注意的是光子的场流形并没有真的绕 z 轴作自旋传播。换而言之没有正真意义上的自旋。和极化场不一样的是极化场具有真正意义上的自旋波。这里光子的自旋是一种

对灵点作简谐振动的表述形式。

矢量势的转动，我们进一步赋予光子具有表述意义下的自旋角动量，和球谐函数进行类比

$$\begin{cases} A_L \sim Y_{1+1}, \\ A_R \sim Y_{1-1}, \end{cases} \tag{6-9}$$

即矢量势的转动性质与 $l=1$ 的球谐函数 Y_{lm} 一样。所以，这种类比使得光子具有 $l=1$ 的自旋角动量。

这个结论是普遍的：任何矢量波函数所描述的粒子，都具有 $l=1$ 的自旋角动量。左旋和右旋圆偏振光子，自旋角动量在 z 轴的投影分别是 $+\hbar$ 和 $-\hbar$。光子自旋在 z 轴的投影不可能为 0，没有与 $m=0$ 相对应的态 Y_{10}，这是由于光子没有质量并以光速运动，是纯相对论性粒子。由于没有 $m=0$ 的态，光子的运动具有螺旋性，当 $m=1$ 时，其自旋方向与运动方向相同，而当 $m=1$ 时，其自旋方向与运动方向相反。

二、光子的偏振

光子的特性一直是困扰物理学的重要问题，也是量子物理学的基本问题。量子理论一直被概念的和哲学的问题所缠绕。现在在场流形理论中，这种困扰并不存在。光子是纯态的三维量子波，量子波的波粒二象性及双缝衍射在第四章第十一节中我们论述过。现在我们来讨论光子的偏振。

1. 偏振光

量子波灵点在与沿传播方向垂直面上的某个方向振动，则这样的量子波为偏振光子，而垂直面上的某个方向就是偏振方向。所有的光子都带有自己的偏振方向，任何方向的偏振都存在。当一束普通光从偏振片的一面射入，从另一面射出的光就是偏振光，其光强等于入射光强度的一半，从偏振片射出的光，其偏振方向总是固定的。我们所观测到的偏振态是我们测量所赋予的效应，入射前的光子只有一半偏振方向与偏振片方向相近的才能通过，偏振片按偏振片的方向给予了光子相同的偏振方向，如图 6-2 所示。偏振光透射光的强度满足 $E_x{}^2 = I\cos^2\theta$，其中 $I=E^2$ 是入射的光强，θ 是偏振片方向与入射光偏振方向的夹角。通俗地讲光子的偏振方向可以通过偏振片来转动一个小角度，本质是转动了灵点传播的场纤流形。场纤流形的转动使得光子获得了新的偏振态，并失去了对原偏振态的记忆。

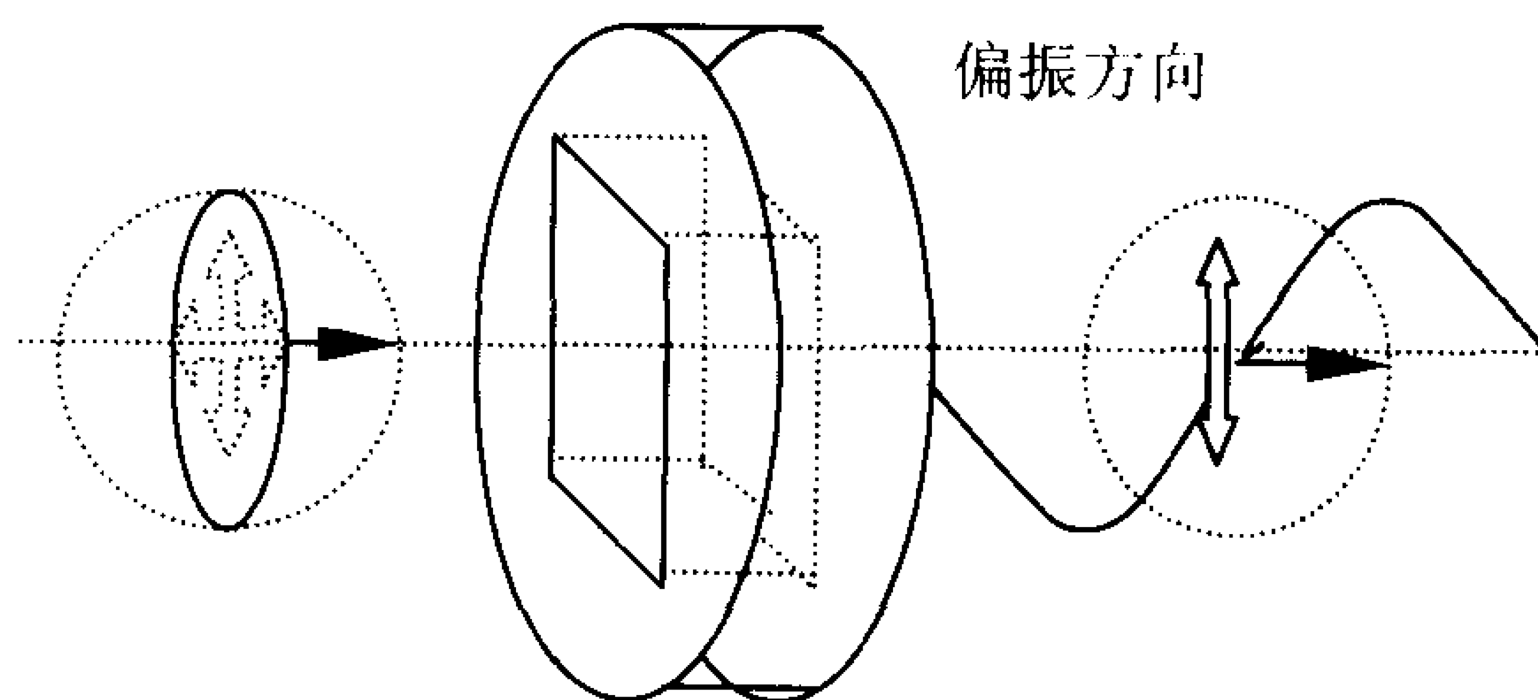


图 6-2 光子偏振态的形成

2. 爱因斯坦—玻多尔斯基—罗森(EPR)实验

如图 6-3(a)在某些情况下，原子会很快地释放出一对光子。这一对光子从光源出来后分别沿着两个相反的方向射出；由于它们具有不同的波长，它们将被两个不同的过滤器所识别，并且分别通过一个恰当的过滤器。在这个装置中，左边的 HV 装置将测量到达左边光子的偏振性，而右边的 HV 装置将测量到达右边光子的偏振性。结果是一旦发现右边的光子是水平偏振的，就会同时在左边发现一个垂直偏振的光子，反过来也是。但是，如果一个量子测量可以改变被测量物体的状态，那么左边的装置是如何影响几米之外的右边光子

的偏振性的呢？我们不考虑复杂的哲学问题，从场流形的角度来看，这是一个很简单的问题。如图 6-3(b) 所示。一对光子是从同一点产生出来的，联结两光子灵点的场纤为同一场纤（由非游离态的一个个基本单元场流形一维排列构成一维场纤），我们称为对偶光子。场流形遵循这样的法则：对于弹性场流形总是形变量越小的场流形越容易形变。对于一对量子波在产生瞬间的极小区域内的场流形显然也遵循这样的法则。因此对于量子波场流形当一灵点垂直振动时，垂直方向的场形变量就比水平方向的场形变要大，则与之对偶的另一量子波灵点的振动就必然沿场形变量小的水平方向振动。这就是为什么这种一对偶光子的偏振方向总是相互垂直。理解了一对光子的偏振方向总是相互正交之后，我们再来左边的装置是如何影响几米之外的右边光子的偏振性的。这是因为联接一对偶光子内禀场流形灵点之间的场纤如图 6-3(b) 所示的一个圆柱体的平直场纤场流形，当左边光子的偏振方向被偏振片测量，光子的偏振方向则被转动一个小角度，便产生了一个转动波在圆柱体内的场纤中传播使得对偶光子也转动相同的角度。为了方便理解，可以想象为我们转动一根很长的弹性的棍，另一端也随之转动，这种滞后时间 $\Delta t = \Delta \vartheta R / v$（$R$ 为棍圆截面的半径，$\Delta \vartheta$ 为转动角度，v 为波在弹性棍中的传播速度）。若弹性的棍的一列纵波由一端传播到另一端需要一段时间 $\Delta T = L / v$（L 为棍长），显然 $\Delta T >> \Delta t$。对于实际的场流形来说我们所转动的是场纤本身，场纤是极细的，图中为了理解方便，把场纤画为柱体显然是夸大了。这里要特别注意。这一实验表明真空存在场流形。

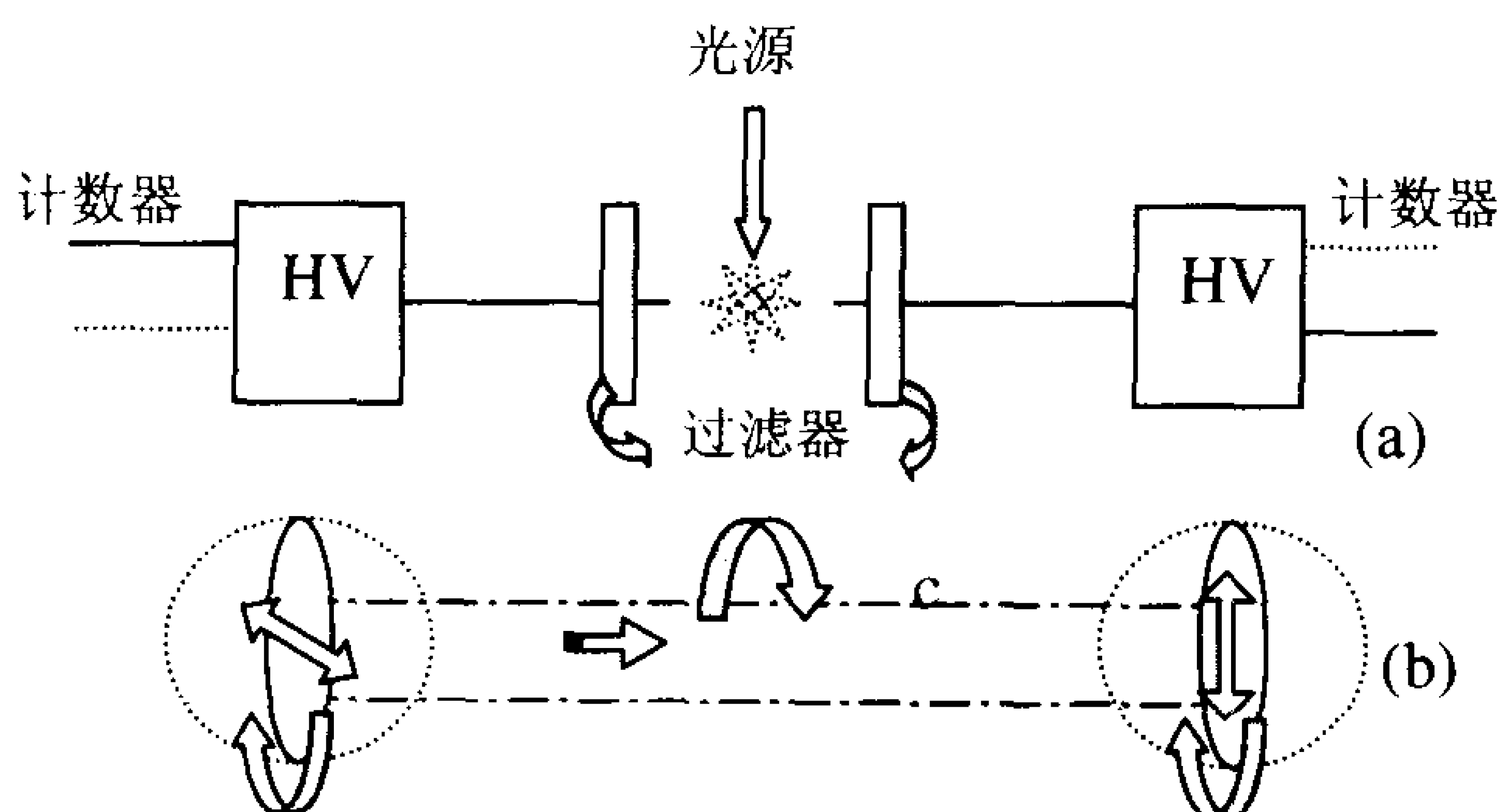


图 6-3　EPR 实验及场流形原理

3. 偏振态的分解

如图6-4(a)所示，一束 45° 偏振光被一个 HV 方解石晶体偏振器分解为两束分别水平偏振和垂直偏振的分量，并且这两束光直接进入一个反方向的偏振器中。在第二个晶体中也会出现同样的情况，这样总的效果是两束射出的偏振光分量又重新叠加在一起，产生一个 45° 偏振波。

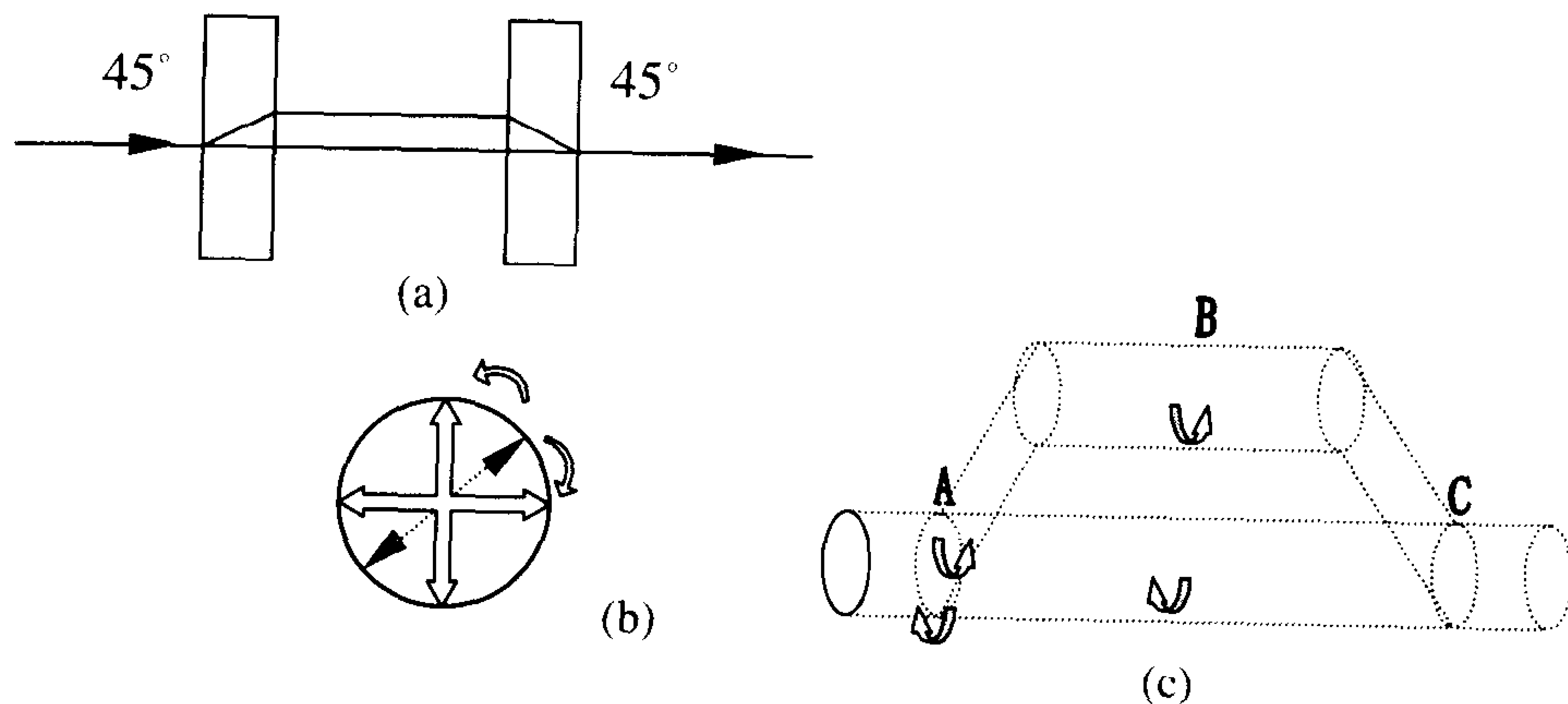


图 6-4　偏振态的分解及场流形原理

从场流形的角度来看，当一光子来到如图 6-4(c) 所示的 A 处，HV 方解石晶体偏振器存在两条通道，把光子的传播灵点场纤分裂为 ABC 和 AC 两条，在 C 点汇合。到 A 处的光子面临两个可选择通道，分别把光子的偏振态左旋 θ，右旋 θ，便把 45° 偏振光子分解为水平或垂直的偏振态，如图 6-4(b) 所示。由于这种分解是发生于同一点 A，使得这种分解作用把两条联结于 A 点的光子灵点轨迹的场纤分别也左旋 θ，右旋 θ。当光子沿 ABC 表现为直偏振，沿 AB 则表现为水平偏振。当存在一个反方向的偏振器时，把两条场纤重新联结为一条，左旋场纤和右旋场纤叠加，又恢复了原来的场纤形态，使得偏振态恢复为原来的偏振态。

第七章　弱力场

第一节　弱相互作用

首先我们要先了解一下弱作用的基本内容。先从粒子理论中最为熟知的几个例子入手来看一下弱作用的特性。其一是中子衰变,$n \to p + e^- + \bar{\nu}$ (见下图 7-1), 是能量守恒所允许的, 并且重子数守恒。中子的寿命约为 15min, 远远大于通过电磁作用衰变的粒子的寿命, 例如$\pi^0 \to \gamma\gamma$的衰变是电磁作用的结果, 寿命约为$10^{-16}s$。

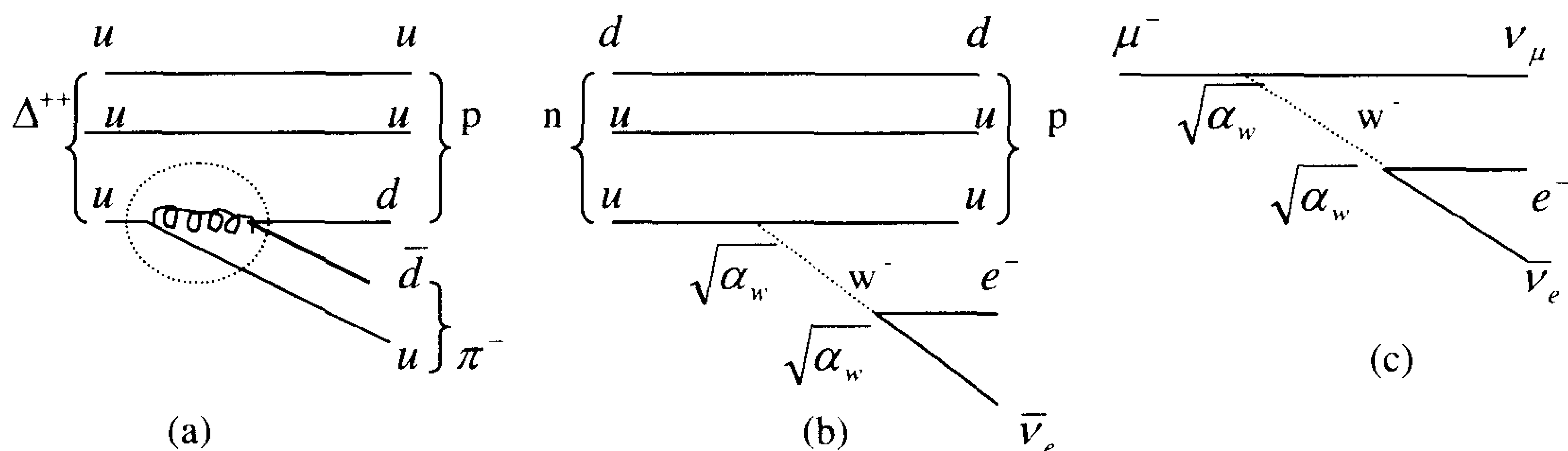


图 7-1　π⁻→γγ费曼图

由于$\alpha_s^2/\alpha^2 = 10^4 \sim 10^6$, 粒子通过电磁作用衰变的寿命应比粒子通过强作用衰变的特征时间至少长$\tau_e/\tau_s \approx 10^4 \sim 10^6$倍。仅有$\alpha$和$\alpha_s$两个标度不能解释比$10^{-16}s$长得多的寿命。带电$\pi$介子的寿命$\pi^- \to e^-\bar{\nu}$的寿命为$10^{-12}s$。一系列测到的奇异粒子的寿命的量级也都为$10^{-10}s$。从能量角度看, 弱衰变$\Sigma \to n + \pi$和强衰变$\Delta \to n + \pi$几乎是一样的, 它们的寿命却相差了 13 个量级。因此, 还有一个新的标度α_w用来描写这种弱相互作用。取$\tau(\Delta \to \pi + n)/\tau(\Sigma \to \pi + n) = 10^{-23}s/10^{-10}s = (\alpha_w/\alpha_s)^2, \alpha_w \approx 10^{-6}$, 它是发射或吸收弱相互作用的量子的几率(与$\alpha_s \approx 1$和$\alpha \approx 10^{-2}$相比较) 。

传递弱相互作用的量子与传递强相互作用的胶子不同, 它与轻子耦合的强度跟与夸克耦合的强度一样, 如图 7-1(b) 和 7-1(c) 所示。弱作用还有一个新奇的特性, 它能将u夸克变成d夸克, 将μ子变成中微子, 也就是说, 弱作用可以改变夸克和轻子的“味道”。现在实验上已发现传递弱相互作用的量子有带正电、负电和中性的三种。

如果认为图 7-1(b) 和 7-1(c) 中W的耦合强度与电磁作用相同, 也就是说发射W的几率大体上与发射光子的几率相同, 则弱作用的缓慢衰变率是由于W有极大的质量而引起的。因此, 与交换光子相比, 交换W的可能性变小, 不是因为W不易发射, 而是由于它的质量太大。大质量M_W压低了弱作用的中间玻色(Bose)子的耦合强度, 给出了有效的耦合强度, $\alpha_w = \alpha/(M_w/M_p)^2 \approx 10^{-6}$。由于量纲原因, 可用某个参考质量表示($M_W \approx 10^2 m_p$), 这一结果也暗示了弱作用的短程性。发射一个虚的W至少需要能量

$M_W c^2$，因而可存活的时间 $\Delta t \le \hbar / M_w c^2$，然后它再被吸收，最远能运行 $c\Delta t = \hbar / M_w c^2 \approx 10^{-3} fm$。这一距离比强作用的 $1fm$ 力程小许多。

第二节　宇称破坏与弱流

我们先从场论的角度来考查弱相互作用，然后再作出相应的场流形解释。先来看一下我们最熟知质子衰变，即 $p \to ne^+\nu_e$。费米(Fermi)受电磁作用流结构的启发提出 β 衰变的不变幅 $\mu = G(\bar{u}_n\gamma^\mu u_p)(u_{\nu_e}\gamma_\mu u_e)$。1956 年，李政道和杨振宁提出弱相互作用中宇称并不守恒。紧接着，吴健雄等用实验证实了他们的断言。后来，关于宇称破坏的一系列精巧的 β 衰变实验发现，对费米的建议应作替换 $\gamma^\mu \to \gamma^\mu(1-\gamma^5)$。现在我们知道这是由半空间特性所造成的，$\gamma^\mu$ 对应粒子表述的全向空间，即宇称对称。对于粒子的内禀场流形来说，粒子在作用的过程中，无论是弹性或非弹性(有粒子产生和湮灭)，拉伸场严格对偶于压缩场。$\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ 对应粒子表述的半向空间，对于粒子的内禀场流形来说，当一个不稳定的高能态极化度的极化场分解为几个低能态的极化场，拉伸场流形不再对偶于压缩场流形。比如一个正极化场分解为两个正极化场，显然非对偶结构，整体表现为宇称不守恒。

经过替换以后，质子 p 和轻子 μ 弱衰变的不变幅为

$$\mu(p \to ne^+\nu_e) = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}_n\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_p]\,[\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_e] \quad , \tag{7-1}$$

$$\mu(\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu) = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma^\sigma(1-\gamma^5)u_\mu]\,[\bar{u}_\nu\gamma_\sigma(1-\gamma^5)u_{\bar{\nu}_e}] \ , \tag{7-2}$$

式中因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 为约定，以保持不包括 γ^5 时 G 的定义。之后，考虑到和电磁相互作用之间的相似性，假弱作用通过被称为弱玻色子的带电矢量 $W^\pm$ 的发射和吸收来实现，弱玻色子与电磁作用的光子和色作用的胶子类似。例如，μ^- 衰变是 W 玻色子作媒介(见图 7-2)，幅的形式为

$$\mu = \left[\frac{g}{\sqrt{2}}u_{\nu\mu}\gamma^\sigma\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\mu\right]\frac{1}{M_M^2-q^2}\left[\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{u}_e\gamma_\sigma\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u_{\nu e}\right] \tag{7-3}$$

其中 $\frac{g}{\sqrt{2}}$ 是无量纲的耦合常数，q 为弱玻色子携带的动量，因子 $1/\sqrt{2}$ 和 $1/2$ 可以使 g 符合约定的定义。与光子相反，弱玻色子必须有质量，实验证实 $M_W = (80.33 \pm 0.15)GeV$。

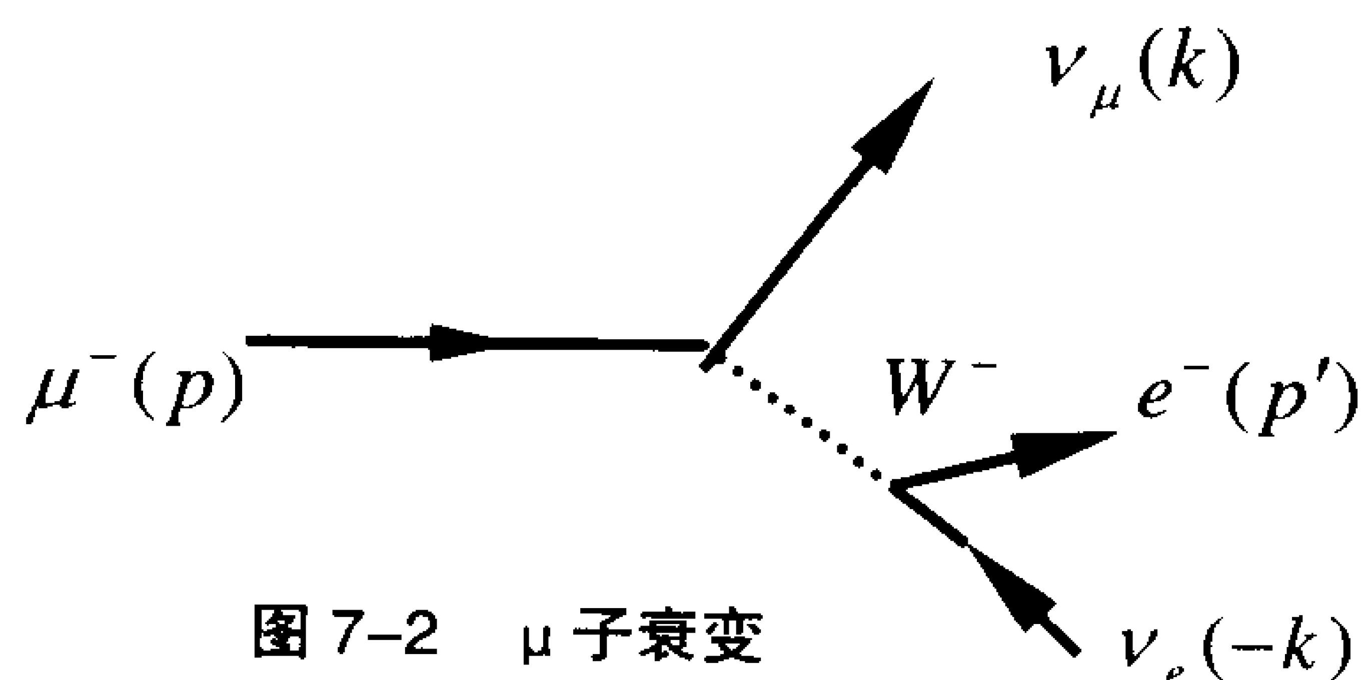


图 7-2　μ 子衰变

四费米子点相互作用的耦合常数 G，和中间玻色子($W^\pm$)与轻子之间弱作用耦合常数 g

是描写同一弱过程的两个常数，考虑(7-1)或(7-2)式，在低动量交换($q^2 \to 0$)时，应有

$$\lim_{q^2 \to 0} \frac{g'^2}{q^2 + M_W^2} \equiv \frac{G}{\sqrt{2}}, \tag{7-4}$$

即

$$M_W^2 = \frac{\sqrt{2} g'^2}{G}. \tag{7-5}$$

如果弱作用和电磁作用的两种场是统一的，则弱作用耦合常数 g' 和电磁耦合常数 e 的大小应相似，如果我们假定 $g'^2 = e^2$，则由(7-5)式可以估算出弱作用中间玻色子的质量：

$$M_W^2 = \frac{\sqrt{2} e^2}{G}. \tag{7-6}$$

其中：$e^2 = 4\pi / 137$，$G = 10^{-5} / M_p^2$(自然单位制 $\hbar = c = 1$)，代入上式，可以估算出 $M_W \approx 90GeV$，这个值和实验值是一致的。

在(7-3) 式中，我们已经对弱玻色传播子的自旋求了和。若 $q^2 << M_W^2$ (例如 μ 子衰变)，(7-3) 式回到(7-2) 式，且有

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \tag{7-7}$$

(注意 $g^2 = 8g'^2$)在这种极限下，弱流之间的传播子消失了，弱流基本上在一个点发生相互作用。弱作用之所以弱，不是因为 $g << e$，而是因为 M_W^2 很大。假如 g' 与 e 相当，则在能量达到 M_W 量级或更高时，弱作用强度将变得与电磁作用强度相当。我们可以把 $g' \approx e$ 认为是弱作用和电磁作用的统一。

第三节　弱力场场流形本质

对于极化场而言,极化场流形就是静态弱力场流形。因而弱作用是在内禀空间内进行的，所以弱相互作用的力程就特别的短。极化场处于极化态的最低能级时最稳定，当极化场极心以外的第二级场质也达到形变极限时，处于高能态。这种向极心形变的场流形最终要以自旋波的形式存在。高能态极化场自旋波为高能态自旋波。这不是一种很稳定的状态，最终要回到低能态才稳定。例如 μ 子要衰变成电子，μ 子释放一个自旋波使极化场的极化态能量降低，即只有 A 层场质达到压缩极限态。如图 7-3 所示。

这种自旋波没有场质得失，所以不存在电荷，是一种纯自旋波。释放了原来极化场的自旋波，并带走了相应的极化态能量。原来的极化场就处于低能无自旋态，显然这种状态是不可能存在的，于是又释放一个低能自旋波，同时极化场获得一个相反的自旋，保持角动量守恒。最终衰变成稳定的低能态极化场，即电子。弱作用的本质是极化场内禀流形不稳定而发生衰变分离，而形成多个低能稳定的极化场。在弱相互作用中，由于极化场的内禀场流形发生了变化，极化场极化态发生改变，且保持能量守恒、 电荷守恒。要特别注意的是两极化场流形本身并不会像引力场一样对进入内禀场流形区域的极化场的极心产生

引力或斥力，但可以诱导极心之间传递W粒子。

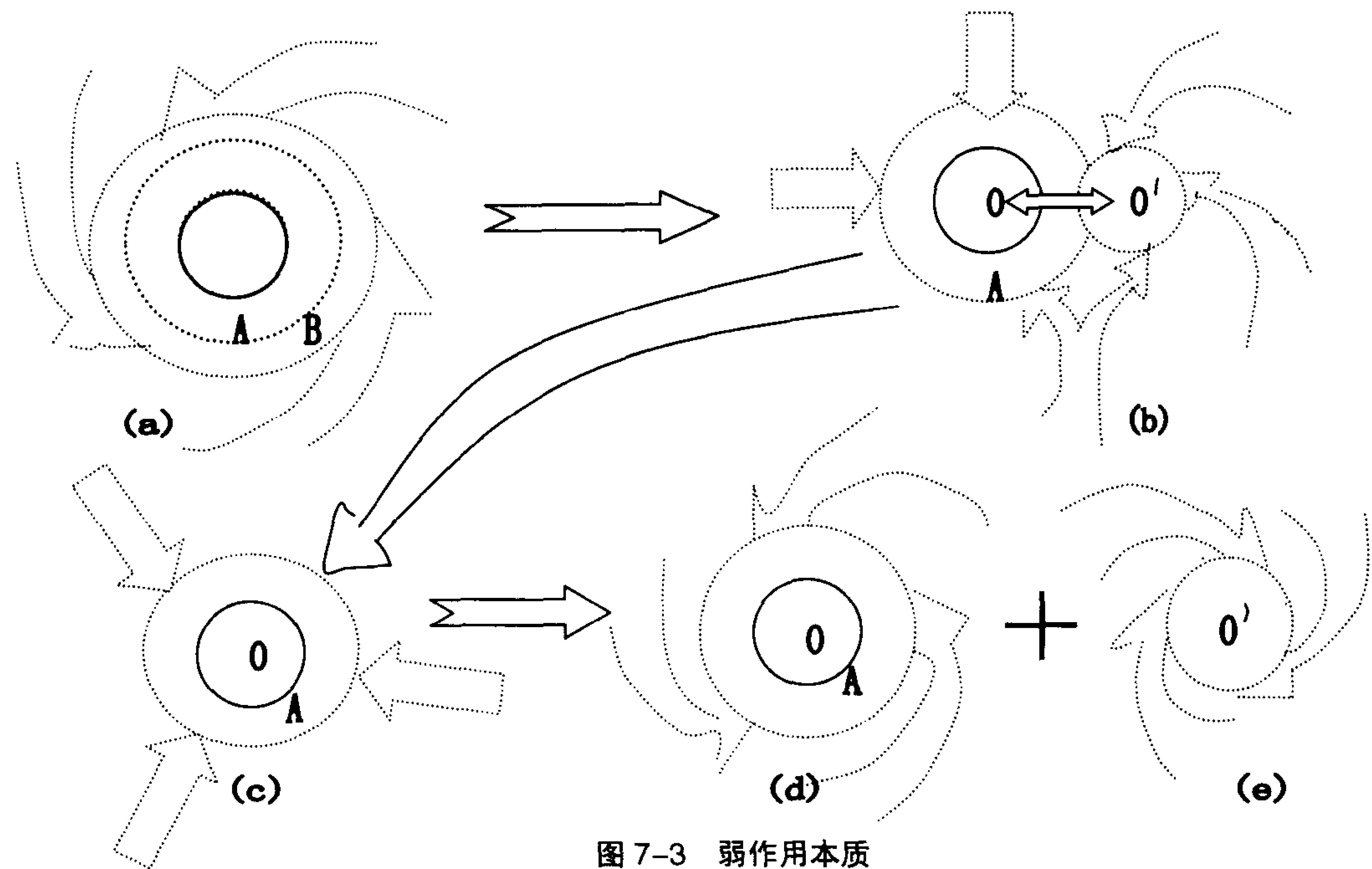


图 7-3　弱作用本质

第四节　弱作用耦合常数

这里我们的主要任务是用场流形理论来解决以下几个问题：

(1) 弱作用耦合常数的短程性及W玻色子本质；

(2) 弱作用耦合常数的强弱的估算；

(3) 弱作用的温伯格(Weinberg)角ϑ_W的估算以及希格斯(Higgs)粒子的不存在性；

(4) 卡比波(Cabbibo)角的本质。

1. 现在我们先来看第一个问题

从场流形的观点来看，弱作用是被限制在内禀空间内进行的。考虑非低能态极化场的衰变：μ轻子的内禀空间半径为R，在极化场的分裂(或弱相互作用)首先是由极心区域开始的,极心外的场流形是不会发生相互作用的。极心要分裂则要有一个不稳定的极心区。当极化场处于高能态时，内禀场流形向极心拉伸(或压缩)加剧，极点处非游离态场流形处于非完全球对称态，发生了非常微小的形变，在极点的邻域(而非整个内禀空间）如图 7-4 所示存在强应变场流形区域，形变极点及其邻域称为衰变极心区。因为这种极心区会发生分裂，

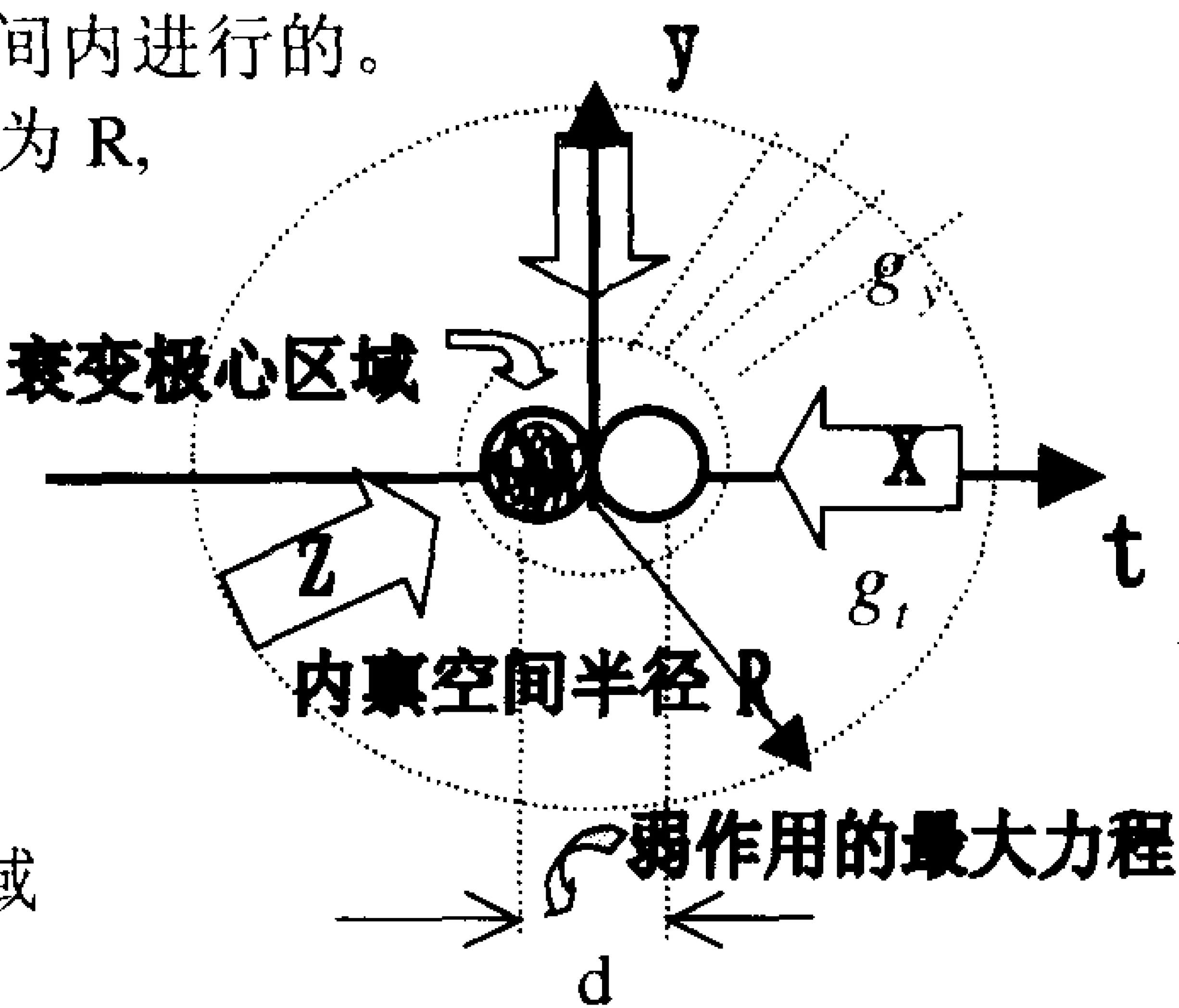


图 7-4　弱作用力场

最终导致极化场的衰变。衰变极心区只能存在于极化场的中心区域，换而言之，衰变极心区的背景流形是极化场流形。衰变极心是非游离态的形变后的基本单元场流形，具有双极点效应，但被限制在极小的极心区域内。衰变极心区是不能独立存在于平直场流形中的，因而不可通过实验直接观测到，为虚态的场流形。如果要使衰变极心区能被实验测出，那么衰变极心区就要进入平直场流形空间中，这样衰变极心区就必须有一个很强的极化场流形背景，这样的一个整体才能被实验所测到。这个整体是一个质量很大的粒子，这个粒子就是我们所熟知的W粒子。W粒子的静质量$m = 80.22 \pm 0.26 GeV$。

弱玻色子有三种：W^+, W^-和Z^0。Z^0 弱玻色子的极心存在一份非游离态基本单元场质，这一份场质处于半游离态，即存在一个非完整的空穴和非完整的游离态场质，如图7-4 中极心所示。黑色的小球表示一份游离态场质，而白色小球表示一份空穴场质。一份游离态场质和一份空穴场质完整重叠则是一份非游离态基本单元场质。如果这种重叠是非完整重叠则形成半游离态，这种半游离态为极心的极化场就是Z^0粒子。很自然Z^0粒子的衰变应该是带一正和负电荷的一对轻子。若这种半游离态场质的拉伸区和空穴耦合，则形成W^-粒子。半游离态场质的压缩区和游离场质耦合，则形成W^+粒子。这就是弱玻色子的场流形结构。弱作用极心区(即虚W粒子)的结构和W玻色子的结构是一致的。弱作用的极心是一份形变的非游离态基本单元场质，我们定义弱作用的极心为弱荷。弱荷和极化极点相作用便形成弱衰变而分裂成两极化场。从另一个角度来看，弱作用也可以说成两极化场间交换弱荷。这种观点就是现在的QFD理论观点。

弱作用的力程小于10^{-16}，由力衰变极心区域小于10^{-16}厘米，在内禀流形中心部位。在图 7-5 中，一个极化场流形极心由一个分裂为两个极心时，弱作用结束。这里我们要特别注意的是极化场流形极心和极化场流形的极点在弱场流形中是两个不同的概念。极心没有场质得失，极心的分裂是场流形形变中心区的分离，而极化场的极点场质是一基本单元游离态的场质，要么多出一份场质，要么缺损一份场质。为理解弱作用力程，我们可以把极心区分裂想象为一个液滴分裂为两个液滴，当两个极点刚好相切时，球心之间的距离就是弱作用力程 d。我们可以理解为什么弱作用的力程很短，小于10^{-16}厘米。

2. 我们来考虑弱作用耦合常数的大小

在上面我们已经得知弱作用是极心分裂而造成的，而极心分裂是由极化场流形向极心压缩(或拉伸)致使极心形变而发生弱作用衰变。这种弱作用是由极化场流形(即弱场流形)诱导极心而产生的弱作用。如图 7-4 所示的极化场内的衰变极心区，场流形向衰变极心区压缩(或拉伸)汇集于一份基本单元场质上形成一个完整的极心场，换而言之在衰变极心区所形成的是完备的W粒子。

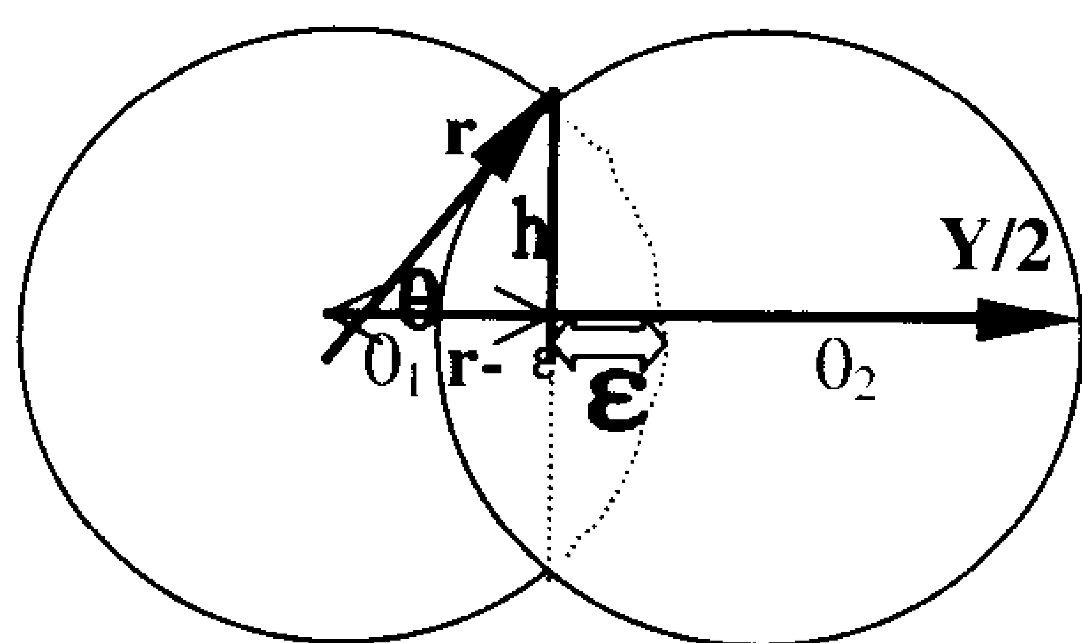


图 7-5 弱场内禀流形极心的分裂

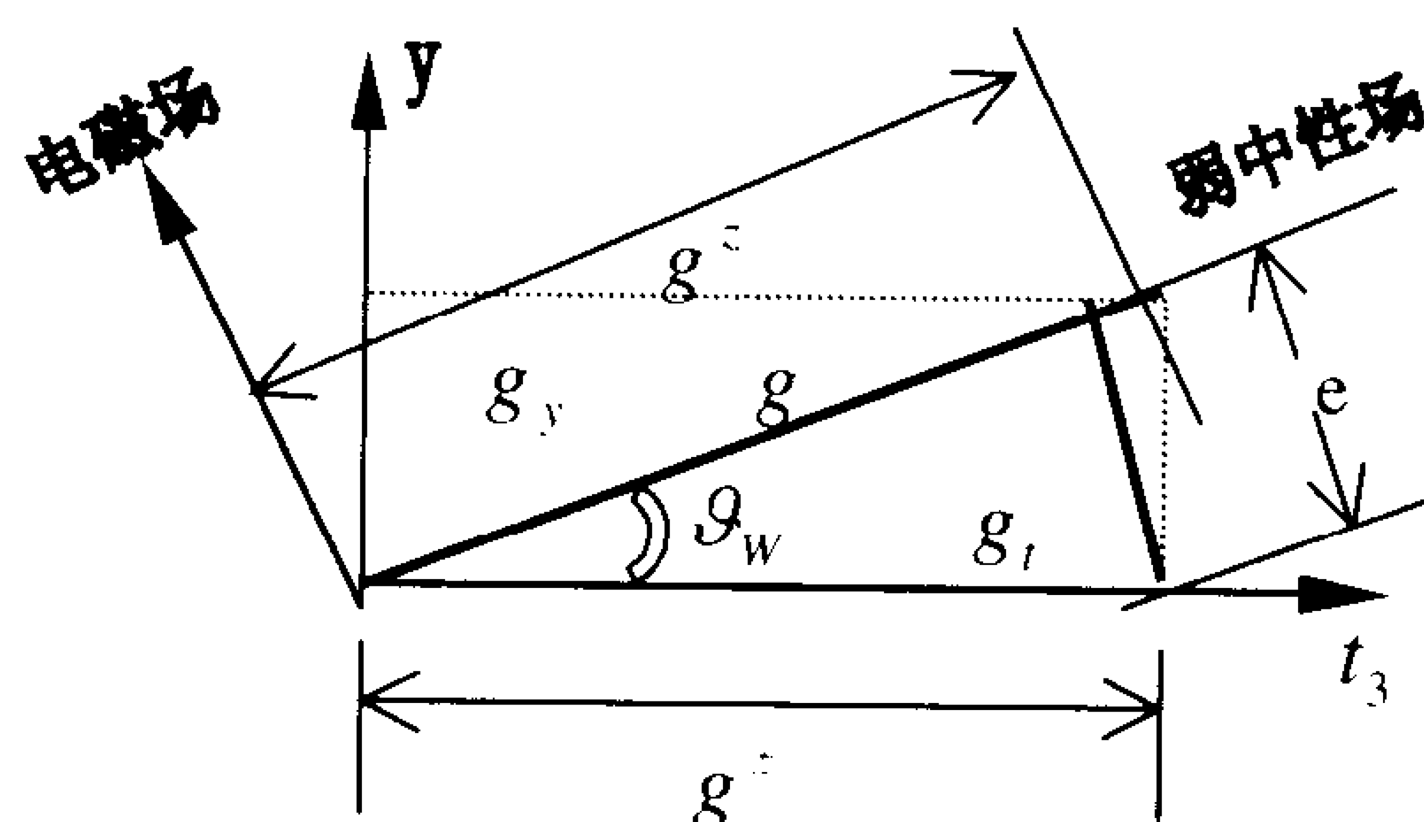


图 7-6 弱电耦合常数

我们具体来估算一下弱作用耦合常数的大小。在电磁耦合常数的估算中，我们得知电

磁耦合常数的大小是由场纤诱导造成的，电磁耦合常数$\sqrt{\alpha}=e$，在场论中常用e来表示$\sqrt{\alpha}$。具体的估算见前面的第五章第五节电磁耦合常数的估算。电磁耦合常数的大小是由场纤的数量及性质决定的。极化场流形极心存在基本单元场质得失，其内禀空间的场流形必然存在场纤，这种场纤就是电场纤维。参见第四章第十节极化场纤维特性，图 4-15。我们可以直观的得到弱场流形的纤维性完全等同于电场纤维。对于单极化场，虽然极化场弱场流形为局域协变流形，可不考虑场纤结构，但对于两极化场来说，局域协变流形不能直接发生相互作用。量子场间只能通过某维通道进行相互作用。考虑极心区域，类似于电磁耦合场纤诱导特性，弱力场的作用也是极心在电场纤诱导下产生的，估算过程和电磁耦合常数的估算完全一致。于是有弱作用耦合常数$g'\approx e$(即$g=\sqrt{8}e$)。这一结论和前面最初的假设是一致的。

3. 耦合常数g的性质及ϑ_W角

现在知道了弱作用耦合常数g的大小，我们可以作这样的考虑，弱场之所以发生弱衰变是极化度过大，并且极化场应变非严格球对称，这是基本条件。

这样可把场纤的诱导分为两部分：球对称向极心拉伸(或压缩)的部分g_t和向极心形变的非球对称部分g_y。从弱作用玻色子W的传递的角度来看，玻色子W存在两类场纤通道，球对称的和非球对称的。做了这样的分解之后，我们就可以把g视为一个类似矢量的量，由g_y和g_t组成(参见图 7-5)，作矢量分解之后有图 7-6。

现在我们来了解g_y和g_t的关系。通过对极心分裂过程的分析，我们可以得到他们的比例关系并求出ϑ_W。

首先我们先来解释一下图 7-6 中为什么$\vec{g}_y$会垂直于$\vec{g}_t$。$\vec{g}_t$为球对称向极心拉伸(或压缩)的部分，$\vec{g}_t=\vec{g}_{tx}+\vec{g}_{ty}+\vec{g}_{tz}$。$\vec{g}_y$是沿弱作用玻色子传方向的部分，把$\vec{g}_y$定为$y$轴方向。则$\vec{g}_y$和$\vec{g}_t$之间的夹角为$45^\circ$。弱场流形是半向空间，$\vec{g}_y$和$\vec{g}_t$之间的夹角为全向空间的两倍，即为$2\times45^\circ$，$\vec{g}_y\perp\vec{g}_t$。可以参考后面图 7-7(a)，性质是相同的。

考虑图 7-4 中弱作用的极心区域。设极心分裂前是一个极小的球体，然后由一个分裂为两个。两球相切时，球心间的距离 d 为弱作用的最大力程，如图 7-4 所示。球面为二维流形，其值为$4\pi r^2$。弱作用过程我们可以简化为两球体分裂，g_y的大小和两球相交的作用面有关，换而言之，两球刚开始分裂时g_y为最大，这样才能发生分裂，分裂结束后，处于低能极化态的g_y为极小值。相交的作用面垂直于相互作用的方向 **t**，相交作用面越大，则诱导分裂的非球对称场纤量就越大，即沿g_y耦合的概率就越大，$g_y\propto$ 相交作用面。

$$g_y\propto 2\int_{-\vartheta}^{\vartheta} r\cos\vartheta d\vartheta\int_{-r}^{r}dr \tag{7-8}$$

乘 2 是因为有两份作用场相重叠。

球对称部分的g_t的大小则对这应于极心球体的表面积，表面积越大则所包围的球对称的场纤量就越多，W玻色子沿球对称场纤传递的概率就越高。即$g_t\propto$极心球体表面积。

$$g_t\propto\int_{-\pi}^{\pi} rd\vartheta\int_{-r}^{r}dr \tag{7-9}$$

由式(7-8)和(7-9)两式得知

$$\frac{g_y}{g_t}=\frac{2\int_{-\vartheta}^{\vartheta}r\cos\vartheta d\vartheta\int_{-r}^{r}dr}{\int_{-\pi}^{\pi}rd\vartheta\int_{-r}^{r}dr}=\frac{2\int_{0}^{\vartheta}\cos d\vartheta}{\pi} \tag{7-10}$$

如图 7-5 所示,在分裂前,O_1 和 O_2 完全重合, 此时 $\varepsilon=r$, 当完全分裂时的瞬间 $\varepsilon=0$。此时弱作用结束。所对应的 O_1 和 O_2 间的距离为 $2r$, 即弱作用力程。找出由完全重叠到完全分离时这一过程的平均值所对应的 g_y/g_t,便可以求出这一过程的 ϑ_W 值。由图 7-5 有

$$h=\sqrt{r^2-(r-\varepsilon)^2}=\sqrt{2r\varepsilon-\varepsilon^2}$$

两球相交的面积

$$S=\pi h^2=\pi(2r\varepsilon-\varepsilon^2) \tag{7-11}$$

以上 $r-\varepsilon$ 为圆心 O_1 到相交面的距离, ε 为相交面沿 $Y/2$ 轴到 O_1 球面的距离。O_1 O_2 完全重叠到 O_1 和 O_2 完全分裂时的平均的相交面的大小为(其中 ε 由 r 完全重叠, $\varepsilon=r$ 变为 $\varepsilon=0$, 两球相切)

$$\overline{S}=\frac{\int_0^r\pi(2r\varepsilon-\varepsilon^2)}{\int_0^r dr}=0.667\pi r^2 \tag{7-12}$$

由 $\overline{S}=\pi(2r\overline{\varepsilon}-\overline{\varepsilon}^2)$ 有

$$\overline{\varepsilon}^2-2\overline{\varepsilon}r+0.667r^2=0$$

解之: $\overline{\varepsilon}_1=0.423r$,$\overline{\varepsilon}_2=1.155r$ (因大于 r, 不合理舍去)

$\overline{\vartheta}=\arccos(\frac{r-\overline{\varepsilon}}{r})=\arccos(1-0.423)=54.76^\circ$, 由 $g_y/g_t=\tan\vartheta_W$ 和式(7-10)有

$$\vartheta_W=\arctan\left[\frac{2\int_0^{\overline{\vartheta}}\cos\vartheta d\vartheta}{\pi}\right]=\arctan\left(\frac{2\sin 54.76^\circ}{\pi}\right)=27.47^\circ \tag{7-13}$$

与 r 的取值无关。 r 在弱作用过程中是一个变量。

这里的 ϑ_W 就是我们大家所熟知的温伯格角。初看起来是乎不应该是温伯格角。因为我们现在所分析的是粒子的内禀空间, 而温伯格角的概念是弱电统一理论中的概念, 两者是不同的。我们可先接受这个结论, 之后我们再来解释。我们得出理论计算值 $\sin^2\vartheta_W=0.213$, 与实验值 $\sin^2\vartheta_W=0.215$ 是很符合的。

我们现在来解释为什么这里由内禀场流形分析得到的 ϑ_W 就是温伯格角。这是由于粒子内禀空间和整体粒子空间之间存在一种奇妙而严格的对应。

温伯格-萨拉姆(Salam)提出的弱电统一规范场理论所采用的群是 $SU(2)\times U(1)$ 群, 其中弱同位旋群 $SU(2)$, 弱超荷群 $U(1)$。第一代轻子和层子的自由拉氏密度是

$$\mathcal{L}_0=i(\overline{q}\partial\!\!\!/ q+\overline{\ell}\partial\!\!\!/\ell)_{左}+i(\overline{q}\partial\!\!\!/ q)_{右}+i(\overline{e}\partial\!\!\!/ e)_{右} \tag{7-14}$$

在弱相互作用时, 引入规范场, 运动方程中的 $\partial\!\!\!/$ 将变为 $D\!\!\!\!/$

$$D\!\!\!\!/=\gamma^\mu D_\mu$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_t \vec{W}\cdot\vec{t} + ig_y B_\mu (Y/2) \tag{7-15}$$

由希格斯机制使$SU(2)\times U(1)$定域规范变换引入的无质量粒子场$W_\mu^i = W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$(由$SU(2)$)和$B_\mu$(由$U(1)$)重新线性组合成三个有质量的玻色子($W^\pm, Z^0$)和一个无质量的玻色子场($A_\mu$即光子)。在(7-15) 式中$\vec{t}$是$SU(2)$群生成元，$Y/2$为$U(1)$生成元。如表7-1 所示。

在表 7-1 中，$\vec{t}$是我们所熟知的泡利矩阵，和三维坐标基$\vec{e}_i$是严格对应的。这一点我们在前面第四章第十节中我们谈到过粒子表述空间和粒子极化场内禀空间的对应性。$\vec{e}_i$为坐标基，张成极化场内禀空间。$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$是沿$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$的场应变，$\varepsilon_{ii}\cdot\vec{e}_i$构成表示力场的一个矢量。

表 7-1　　粒子表述空间和粒子极化场内禀空间的对应性

		$SU(2)$	$U(1)$
整体粒子表述空间	生成元	t_1， t_2， t_3	$Y/2$
	规范场	$W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), W_\mu^3(x)$	$B_\mu(x)$
粒子极化场内禀空间		三维极化场坐标空间	一维坐标空间
	坐标基	$\vec{e}_x$， $\vec{e}_y$， $\vec{e}_z$	x
	场应变	ε_{xx}， ε_{yy}， ε_{zz}	ε_x

从第四章第七节质量本质中，我们知道质量的产生最基本的条件是要有极化场，从应变的角度来看极化场是球形应变，$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}$。只有三个维度都存在向内(或向外)的球形应变才能形成有质量的极化场。如果只有两维应变存在$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}$，则形成中微子极化场。如果只有一维应变存在$\varepsilon_{xx}$，则形成量子波，即光子。当我们用对应原理来理解上表 7-1 中的$B_\mu(x)$对应ε_x，则我们知道$B_\mu(x)$粒子的场形变只有一个方向，显然就是无静质量的光子。而ε_{ii}对应$W_\mu^i(x)$，说明$W_\mu^i(x)$粒子的内禀场形变只有一个方向，这样的粒子无法产生静质量，而是类似于虚光子的粒子。这样的粒子不存在，我们可以这样想象：把三个方向的$W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), W_\mu^3(x)$压缩入一个球形内禀空间中，便形成一个有静质量的极化场。其实，场流形的x, y, z正好对应粒子空间的$W^\pm, Z^0$。而弱作用玻色子本身就是一种极心发生形变而构成的双极化场，当然存在静质量。

在弱电统一理论中，由于我们对粒子内禀空间的无知，我们无法知道$W^\pm, Z^0$为何具有静质量，但通过非常精巧的希格斯对称破缺机制使$W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), W_\mu^3(x)$获得静质量而对应$W^\pm, Z^0$。在场流形理论中，根本不存在希格斯机制，自然也就没有什么希格斯粒子存在。式(7-5) 虽然是粒子空间的表象，但也适合描述极化场内禀空间，只要把$\vec{t}$换成$\vec{e}_i$便可。式(7-5) 中$W_\mu^i(x)$无静质量，而和现实世界不一致。希格斯机制使得我们的表述回到现实中来。

4. 我们现在来考虑卡比波角

要了解卡比波角的来源，我们有必要了解一下夸克的结构。在下面一章中，我们专门

谈到了强子的结构。由那里，我们知道夸克是一种带弦的极化场，当极化场在其背景流形中不稳时，便会形成弱作用极心。弱作用的极心是一份基本单元场质，在前面我们谈到过 W 玻色子的内禀结构，弱作用的极心和夸克极化场极点耦合便发生弱作用。这里要注意的是虽然夸克带分数电荷，但耦合并不影响弱作用的极心。

夸克的弱作用和轻子的弱作用在本质上是一致的，但也存在差异。最大的差异在于夸克带弦，而轻子不带弦。弦的存在对弱作用耦合常数是有影响的。现在我们来具体看一下弦是如何影响弱作用耦合常数的。

当弦存在时，弦和极心相连，此时极心裸露，极心衰变不可能沿弦的方向，只能沿弦以外的方向传递弱作用玻色子。因此弦的截面 $S_{弦}$ 会遮挡住极心球面 $S_{球}$ 的一很小部分面积，由于遮挡的部分不可能诱导弱作用产生，这样便降低了耦合强度 $G_F < G_\mu$。在极化场内禀空间中，弱作用玻色子的传递是具有方向性的，因此我们有必要考虑耦合常数的方向，因而有

$$\vec{G}_\mu = \vec{G}_x + \vec{G}_y + \vec{G}_z \tag{7-16}$$

$$\vec{G}_x \propto S_x \tag{7-17}$$

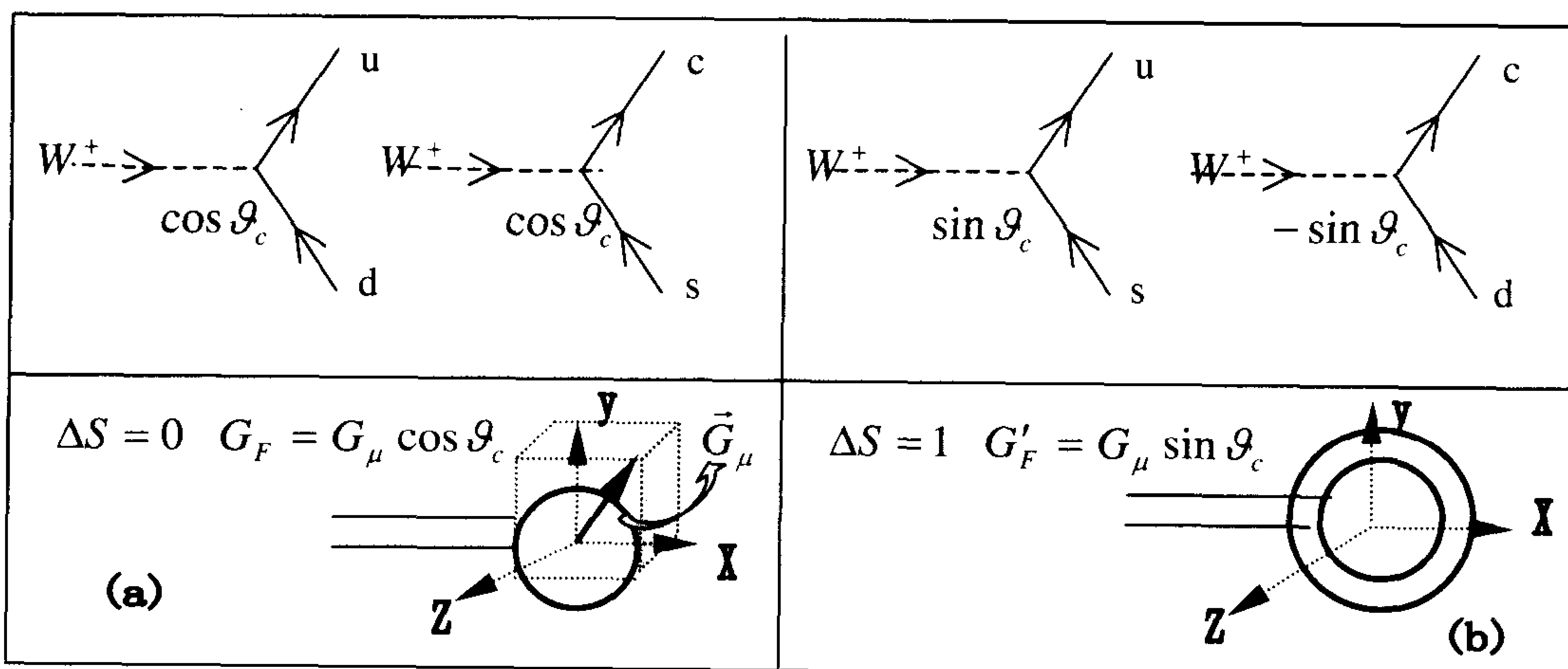


图 7-7 Cabbibo 角的场流形本质

设弦是沿 x 方向的，如图 7-7 所示。把球面沿坐标空间 x, y, z 方向分解，球面在 x 方向上的投影为 S_x，弦截面在 x 方向的投影为 Δs，则在 x 方向上被屏蔽的面积就是 Δs，未被屏蔽的面积就是 $S_x - \Delta s$。考虑屏蔽效应后的耦合常数 G_F 为

$$\vec{G}_F = \frac{S_x - \Delta s}{S_x}\vec{G}_x + \vec{G}_y + \vec{G}_z \tag{7-18}$$

由 $G_\mu = (1.458 \pm 0.003) \times 10^{-49} \mathrm{erg} \cdot \mathrm{cm}^3$，$G_F = (1.415 \pm 0.003) \times 10^{-49} \mathrm{erg} \cdot \mathrm{cm}^3$。说明弦是很细的，对弱作用极心的影响极小。同时也表明了弱荷(即弱作用极心)是一个整体不可分裂的非游离态基本单元场质。无论是轻子还是夸克，弱荷都是相同的。

了解了 G_F 的成因，我们再来看 G_F'。从第八章第五节夸克的代这一节中，我们知道 s 和 c 夸克比 u, d 夸克多出一层达到形变(压缩或拉伸)极限的场质，而达到形变极限的场质丧失了弹性，同时也丧失了物理性质。对夸克极心形成一层坚硬的球面屏蔽外壳，阻止了极心和弱荷的作用。相反弦却可以传递动量，于是弦成了极心和弱荷的作用弱荷的作用的

唯一通道。通道的大小正是弦的截面大小。弦的截面Δs是 x 方上的投影值，于是存在如下关系：

$$\vec{G}'_F=\frac{\Delta s}{S_x}\vec{G}_x \tag{7-19}$$

由式(7-18)，(7-19)我们可以写出如下表达式：

$$\vec{G}_\mu=\frac{S_x-\Delta s}{S_x}\vec{G}_x+\vec{G}_y+\vec{G}_z+\frac{\Delta s}{S_x}\vec{G}_x \tag{7-20}$$

或写为

$$\vec{G}_\mu=\ \vec{G}_F+\ \vec{G}'_{Fx} \tag{7-21a}$$

这里$\vec{G}'_{Fx}$很小，因而$\vec{G}_F\approx\vec{G}_\mu$，而$\vec{G}_\mu$和 x 轴之间的夹角为$45^\circ$，$\vec{G}'_{Fx}$是沿$x$方向的。因而$\vec{G}_\mu$和$\vec{G}'_{Fx}$之间的夹角应为$45^\circ$(如图 7-5(a)所示)。

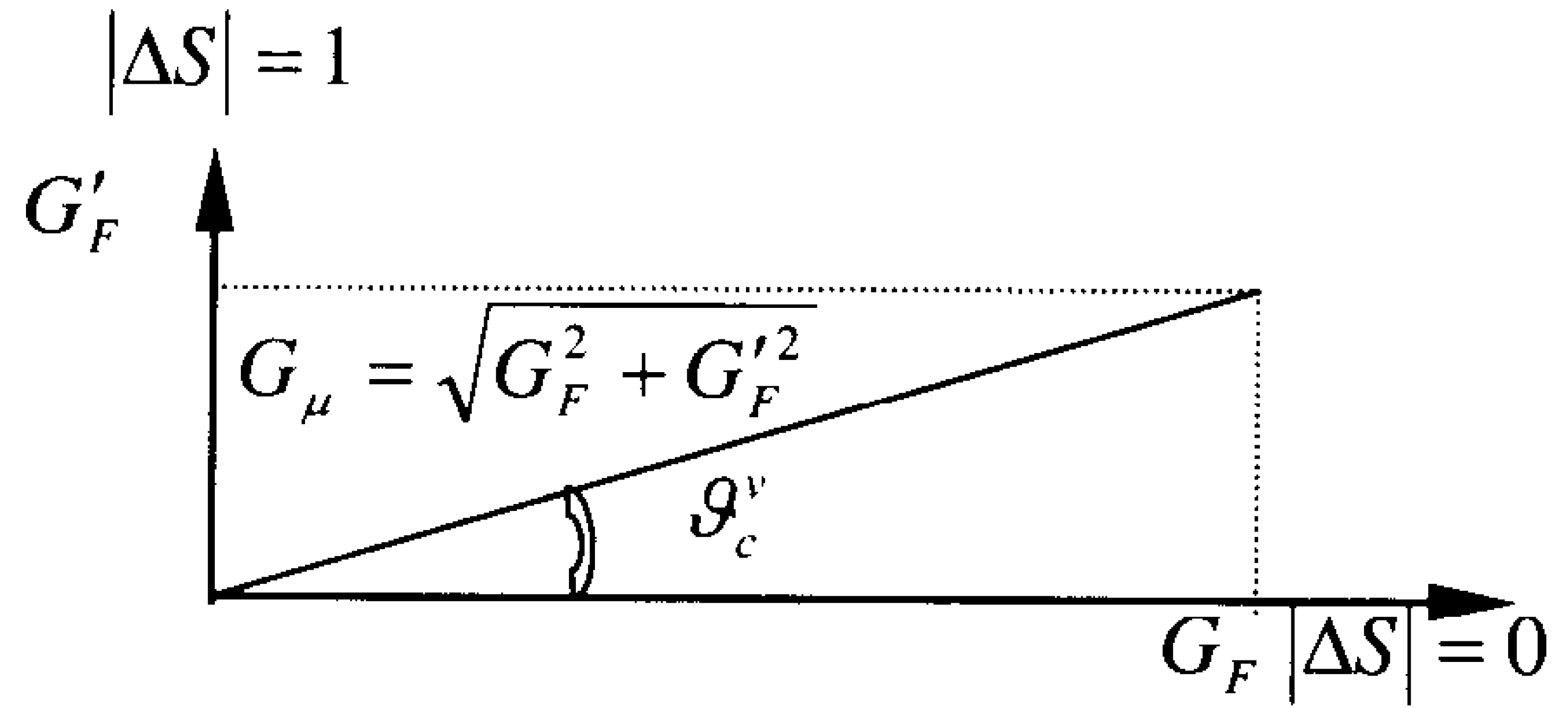


图 7-6 Cabbibo 理论中对强子弱流费米跃迁的耦合常数

特别值得注意的是弱场流形是半向空间，所以$\vec{G}_\mu$和$\vec{G}'_{Fx}$之间的夹角应为全向空间的两倍，$\vec{G}_\mu$，$\vec{G}'_{Fx}$之间的夹角则为$2\times45^\circ$。则$\vec{G}_F$和$\vec{G}'_{Fx}$之间的夹角近似为90°。换而言之，$\vec{G}_F\perp\vec{G}'_{Fx}$ 即：

$$G_\mu=\sqrt{G_F^2+G_F'^2} \tag{7-21b}$$

$$G_F=G_\mu\cos\vartheta_c^v \tag{7-22}$$

$$G'_F=G_\mu\sin\vartheta_c^v \tag{7-23}$$

这就是我们熟知的卡比波角表达式。$G'_F/G_F=\tan\vartheta_c^v,\vartheta_c^v=0.247\pm0.008$。

这里我们还要顺便说一下，对于盖莫夫-泰勒型允许β跃迁(实际上是赝矢流A_μ起作用)中的耦合常数$G_{G-T}=(1.26\pm0.02)G_F$。

实验上通过比较$K^+\to\mu^+\nu_\mu$和$\pi^+\to\mu^+\nu_\mu$两个纯盖莫夫-泰勒型跃迁几率，可以得到G'_{G-T}和G_{G-T}两耦合常数之比，

$$\vartheta_c^A=\tan^{-1}\left(\frac{G'_{G-T}}{G_{G-T}}\right)=0.226\pm0.005 \tag{7-24}$$

可知$\dfrac{G'_{G-T}}{G_{G-T}}\approx\dfrac{G'_F}{G_F}$。说明夸克弦对弱作用的影响是一致的。至于$G_{G-T}$和$G_F$之间有 26% 的差别，应该是夸克的背景流形不同而造成的。至于如何影响是一个有趣的研究课题。

第八章　强子结构

第一节　极化场内禀空间基态基本单元场流形的维度分裂

基本单元场流形的分裂遵循这样的法则：一基本单元场流形维度分裂构成介子态，两基本单元场流形维度分裂构成重子态。

在平直三维流形中的基本单元的场流形的总量是 1，称为基态场流形。处于基态时，坐标是对称的，具有完备的三维特性，我们可以用一个完备的坐标来表示，有 x, y, z 和 $-x,-y,-z$ 且 x, y, z 的长度均为 e，每个半轴的长度 $e \to 0$，形成一个小方体，为非分裂态，而在极化场的内禀空间中，是半空间，对于正极化场只有 x, y, z 三维单向坐标维度，对于反极化场有 $-x,-y,-z$ 三个单向维度，这种基本单元的场质因而只有三个单向维度。极心以外的场质没有场质得失，处于基态，如图 8-1(a)所示。

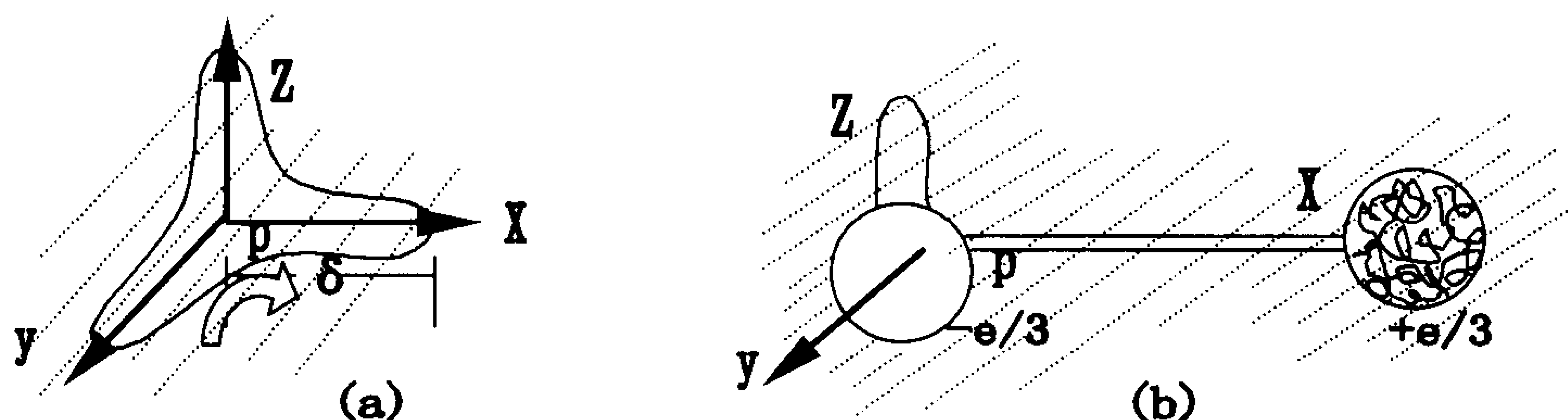


图 8-1　π介子形成

半空间场流形基本单元 P 的单向维度的长度 $\delta \to 0$ 是一个弹性量。每一个维度所占的场质的量为 $1/3$，因处于基态，为非游离态场流形，所以没有纤维场结构，换而言之，不带电荷。我们先考虑 P 的第一种介子态。

当 P 在碰撞区中，会发生强烈的场质形变和冲击，三个维度间存在着维度场质得失，这种得失是以 $1/3$ 为基本量的，设想 y 维场质受冲击后，把 y 维场质交给 x 维，这样由于 y 维失去了 y 维的场质，而出现 $-1/3$ 的场质空穴，而在 x 维上则多出 $1/3$ 的场质，所以就产生一对对偶极化场，所带电荷为 $\pm e/3$，产生一对极化场后，必然要分离，但一维场质是不可能独立存在的，这一对极化场不可能完全分离而独立存在，于是就拉伸原 x 维场质（基态不带电荷）形成一维 x 弦，如图 8-1(b)所示，便构成 p 的二维分裂态，称为介子态。对于带 $-1/3\ e$ 的 y 维上的极化场用字母 d 表示，并称 d 夸克，而 $+1/3\ e$ 在 x 维上的

极化场用$\overline{d}$表示，称$\overline{d}$反夸克。这种介子态由$d\overline{d}$构成。

还存在另一种介子态，即z维上也发生场质丢失，把z维场质交给x维，z维上丢失1/3的场质，出现$-1/3$的空穴电荷，而x维在得到1/3场质的前提下，又获得1/3的场质，x维上的场质总量为2/3，所以y,z维带电荷$-e/3$，而x维带电荷为$2e/3$的极化场我们用字母u表示，这种介子态就由$2\overline{d}u$构成，由于yz维都把自己的1/3的场质交给x维，yz维没有场质，只留下$-1/3$的空穴，空穴总量是$-2/3$，带电荷量是$-2e/3$。

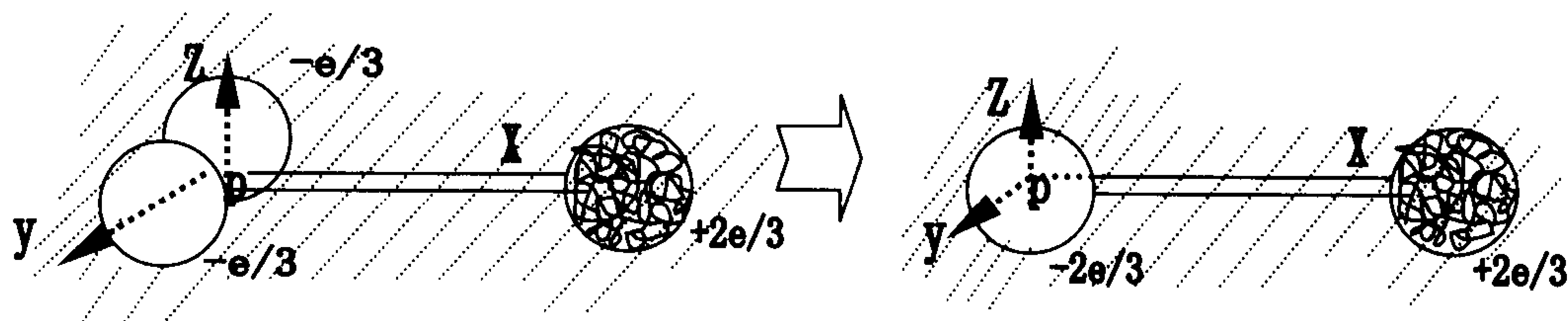


图 8-2 π介子形成

yz维都失去场质，两个空穴之间没有场质来形成弦，于是$\overline{d}_y,\overline{d}_z$就溶合成一个更大的空穴，这个空穴形成一个极子，仍存在yz维结构，空穴没有场质，弦x的场质的量为1/3，u场质的量为2/3，所以总场质的量为1，最终，这种介子态可以用$u\overline{u}$表示，$\overline{u}$夸克带$-2e/3$的电荷的极化场。

对于我们的实验来说，两种介子态都存在，而且是处于一种叠加态，这种叠加态的介子称π^0介子

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u} - d\overline{d}) \tag{8-1}$$

介子态最终要回到完备的基态三维场流形结构，处于稳定结构，x弦把$u\overline{u}$拉到一起，由于yz结构的存在，湮灭产生的量子波要沿yz分离形成二个量子波。

第二节 游离态基本单元场质的维度分裂

一、游离态基本单元场质的未分离态

现在我们来看激发态基本单元场质的形成，当一基本单元的场质A从三维场流形中脱出，至C, 这样就形成了游离态的基本单元场质，称处于激发态，如图8-3所示。

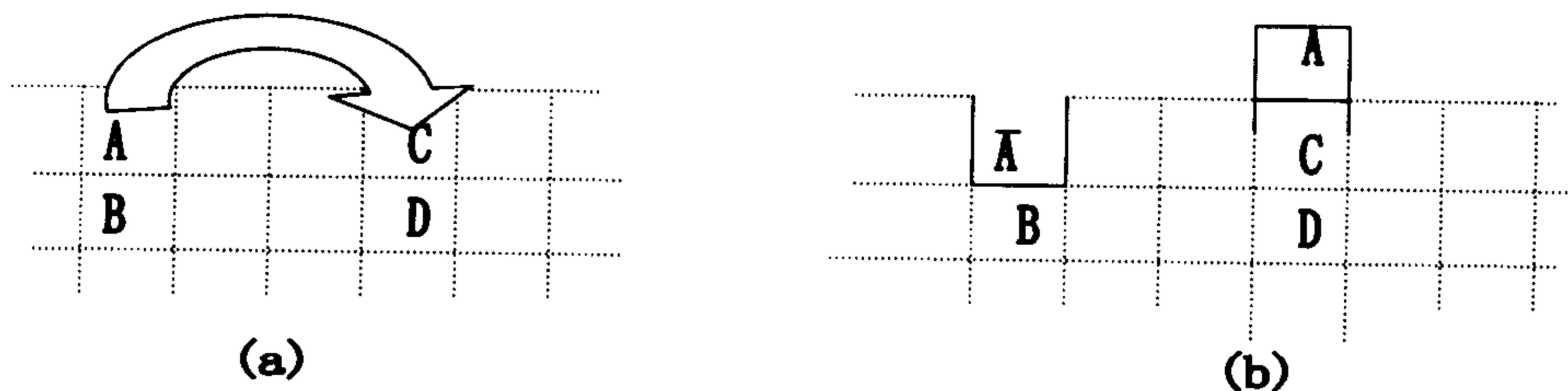


图 8-3 激发态的形成

在 A 处少一份场质，在 C 处则多出一份场质，则必然形成一对对偶极化场，在 $\overline{A}$ 处为空穴，形成反极化场，在 C 处多出一份场质，构成场质的叠加状态形成正极化场。反极化场的电荷量为 $+e$，正极化场的电荷量为 $-e$。

形成极化场以后，极化场的内禀空间是半向空间，对于反极化场空间只有 $-x,-y,-z$ 三个坐标维度，内禀空间内的基本单元的场质也只有 $-x,-y,-z$ 三个方向的场质；对于正极化场则情况正相反，内禀空间内的场质只有 x, y, z 三个方向的场质，正极化场极心是一个空穴，空穴本身是没有维度结构的，以空穴为极心形成一种很稳定的正极化场，如图 8-4(b)所示的稳态结构。当受到扰动时有可能形成亚稳定的正极化场，如图 8-4(c)。

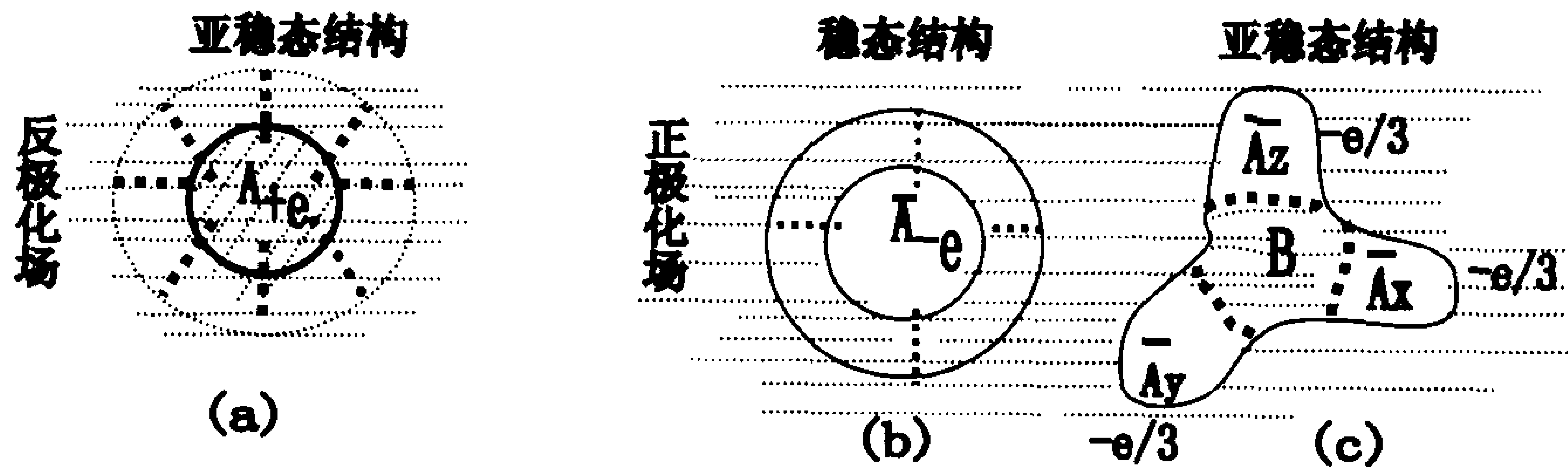


图 8-4 极化场的稳态和亚稳态

所形成的亚稳态结构是由 B 这一基本单元的场质进入到极化场极心并发生膨胀而造成维度分裂，B 的场质和空穴紧密结合构成半空间维度结构，均分空穴，如图 8-4(c)所示，这是一种亚稳态的正极化场结构，也可以变为稳态的正极化场结构。这种转变是没有可观测效应的。

对于反极化场而言，也存在两种结构态，其一是 A 这一游离态基本单元场质强压入三维场流形中，基本单元场质 A 被外部场质强烈地压缩而形成一个小球，如图 8-4(a)所示,没有发生维度分离，但场质 A 在应变为非球对称时容易发生形变，形成亚稳态反极化场。

对于反极化场的另一种情况，极心场质也有可能处于叠加状态，即极心有两份基本单元场质，A 和 C 的叠加态，无论是 A 在极心还是 C 在极心都只存在如图 8-5a 所示的结构。对于反极化场来说这种结构是稳态结构。

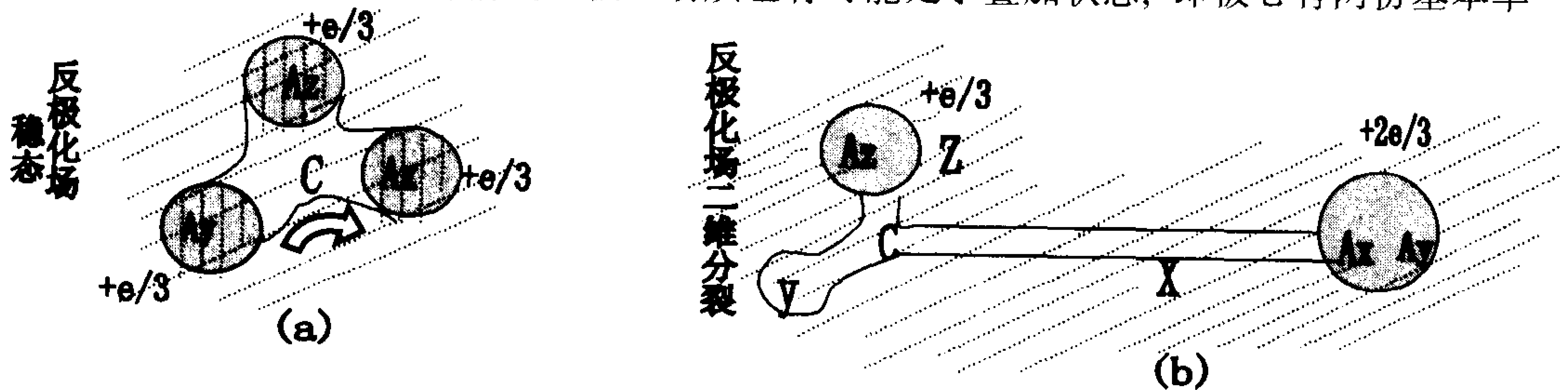


图 8-5 极化场二维分裂

游离态场质 A 在极化场内禀空间只有半向三维结构，对于 C 而言，同样只有三个半向维度，C 不是游离态场质，因而不带电荷，换而言之没有场质结构，对于 A 是游离态质，存在场质结构，A 被 C 均分为三等份，每一份场质有 $e/3$ 的电荷，图 8-5（a）和图 8-4(c)的结构为对偶结构，但对于正极化场是亚稳态，而对反极化场则是稳定结构。

二、激发态基本单元场质的维度分离

反极化场在强冲击下，把 Ay 这一份场质强加入 Ax 中形成 Ax′，Ax′ 要发生分离,于

是拉伸场质 C 的 x 维, Ax 不可能独立存在, 便形成 x 弦, 如图 8-5（b）所示，Ax′ 带有 $2/3$ 的游离场质, 因而有电荷 $2e/3$, Az 没有变化, 仍带有 $1/3$ 的反游离场质, 有 $e/3$ 的电荷。对于 y 维来说, Ay 场质交给 Ax 后, 没有场质, 所以也不存在电荷。但基态场质 C 在 y 方向仍有 y 维场质。Az 为 $e/3$, 而 Ax 带 $2e/3$ 电荷, 静电场相斥, 对于弦 x 来说, 可以构成一种相对稳定的结构, 该结构的场流形称为介子态, 反极化场产生的介子态带总电荷量为 $+e$, 用符号 π^+ 表示, 并称 π^+ 介子。对于 Az 部分来说, 形成极化场, 场质的量为 $1/3$, 带电荷 $e/3$, 我们用字母 $\overline{d}$ 来表示, 并把这种极化场称 $\overline{d}$ 反夸克, Ax′ 也是极化场, 所含游离态场质的量为 $2/3$, 带电荷为 $2e/3$, 用字母 u 表示, 称 u 夸克。

$$\pi^+ = u\overline{d} \tag{8-2}$$

对于极化场来说存在自旋波，在正反极化场相碰时，正反极化场自旋相反，叠加后自旋为零。了解了 π^+ 介子的产生机理和结构，和 π^+ 介子的情况全类似，我们由正极子的亚稳态结构(图 8-4(c))的场质（即游离态空穴场质）的得失，也能得出 π^- 介子的结构，为 π^+ 介子的对偶结构，π^- 介子由 d 夸克和 $\overline{u}$ 反夸克构成，π^- 介子自旋为零。

$$\pi^- = d\overline{u} \tag{8-3}$$

介子态为二维分离态, 是非稳定态。

第三节　质子结构

一、质子的形成

在前面两节中，我们谈到 $\pi^{0\pm}$ 介子的构成，接下来我们来看质子和中子的构成，三维非激发态和激发态一基本单元的场质的二维分离态构成了 $\pi^{0\pm}$ 介子，而两个基本单元场质的三维分离则会造成重子的产生，质子是三维极化场分离而形成的。在图 8-5(b) 中, 我们先考虑极化场的极心, 比如正电子的极心, 这一极心正是一基本单元场流形的游离态场质, 记为Ⅰ。这一游离态场质可视为反基本单元场流形。游离态场质与非游离态场质的结合使得极心部分的场流形被压缩发生形变, 换而言之, 发生微小的维度分离。游离态场质与非游离态场质一基本单元场质紧密地结合成一体, 如图 8-6(a) 所示。这种由反基本单元场质和某一非游离态基本单元场质所构成的场流形便表现为一个完整的带正电荷的极化场, 当这种场流形发生强烈形变(例如受到撞击时)就会发生维度分离。 y 维把 $1/3$ 的反基本单元场流形(从电荷量的角度则为 $e/3$)转移到 z 维上, 然后再把 $1/3$ 的反基本单元场流形转移到 x 维上，于是 x, z 维均获得 $1/3$ 的基本单元的场质而成为 $2/3$ 基本单元场质游离态场质, 表现为带 $2e/3$ 的极化场。这些极化场都有自己相应的 $\hbar/2$ 的自旋。

这里的极化场是永远无法分离的, 因为: ①背景场流形是三维的, 不允许二维或一维结构的场流形独立存在, 只允许三维结构存在。②三维场流形的三维性本身就是基本单元场质所固有的性质, 因而本身也不可能发生维度分离。如图 8-6 (b) 所示, 质子具有三维稳定结构, 这就是质子最终的静态结构。和前面介子态的情况一致, 我们把质子中带 $-e/3$ 的极化场用 d 表示, 带 $2e/3$ 的极化场用 u 表示, 并称这些极化场为夸克。于是质子由三夸克组成, 分别是 uud 夸克。 R_q 是夸克内禀空间半径。

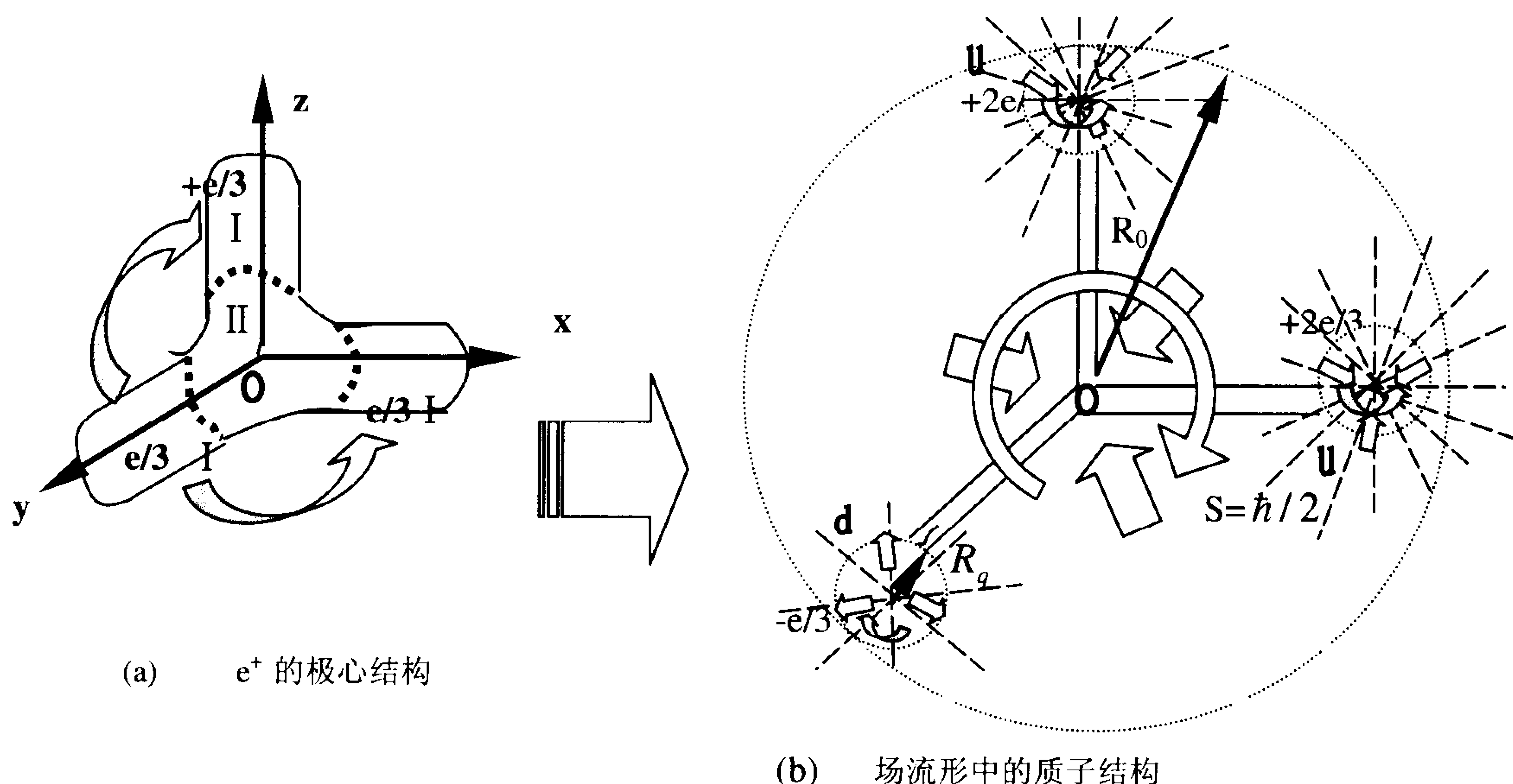
$$p = uud \tag{8-4}$$

二、质子自旋

要理解质子自旋，我们首先要了解一下弦的情况，在图 8-6（a）中的场质Ⅱ为极化场极心的非游离态（未非激发态）基本单元场质，经历三维分裂后，这一基本单元场质便构成了质子的三维弦。对于正极化场极心是两份基本场质的叠加态，对于游离态场质形成夸克在离极心 O 很远的地方，而基态场质被拉成很长的弦，如图 8-6（b）所示，场质Ⅱ由原体积为 V 的小体积变小，为$V \to 0$，这样相当于 O 处缺了一份场质，于是 O 点形成和场质出现空穴相同的效应形成了正极化场，R_O 是正极化场的内禀空间的半径，这个极化场没有场质空穴，因而不会形成场流形纤维结构所以不存在电荷。形成具有正极化场效应的极心区后，自然存在自旋波，自旋$S = \hbar/2$，就是质子自旋。自旋量子波在质子中心区，灵点离夸克很远，因而质子自旋和夸克自旋几乎没有什么直接联系，彼此是独立的。

对于反质子来说和质子的情况完全相同，由图 8-4（c）极化场的亚稳态结构我们可以得到反质子的结构，即是质子的对偶结构

$$\overline{p} = \overline{u}\overline{u}\overline{d}$$



(a) e⁺ 的极心结构

(b) 场流形中的质子结构

图 8–6 核子形成

要注意的是反质子极心部分极化场的形成也是一基态场质拉成三维弦而造成的，这一点和质子完全一样，也是正极化场。夸克本身带有分数电荷，自然带有纤维结构，自旋波在电场纤维中传播便产生了夸克磁矩。因而重子的磁矩主要是由夸克自旋造成的。重子的自旋对磁矩的影响很小。正因如此，我们能通过夸克模型估算出重子的磁矩。

强子自旋 最近的实验表明，由夸克(包括全部价夸克和海夸克)的自旋所提供给质子的自旋成份是$\Sigma = 0.27 \pm 0.05$，而其中由 s 夸克提供的成份是-0.10 ± 0.03，此处负号指 s 夸克的贡献与质子自旋方向相反。以上的数值都是直接的测量结果，且两大高能加速器(CERN 和 SLAC)的结果趋于一致。质子自旋$1/2$ 的组成是

$$\frac{\Sigma}{2}+L_q+L_G+\Delta G=\frac{1}{2}$$

此处Σ是全部夸克提供的百分比，L_q是夸克轨道角动量的贡献，L_G是胶子轨道角动量的贡献，ΔG是胶子自旋贡献(参见 张礼 主编《近代物理学进展》清华大学出版社 P293)。

从场流形的角度来看，胶子就是弦，并没有真正意义上的自旋。和质子自旋一致的(如图 8-6 所示)，强子自旋波作为一个整体表现出来，自旋波灵点和夸克极点相对独立，因而夸克自旋对整体强子自旋贡献很小。考虑到三维中某维夸克q_z自旋和强子自旋波z轴完全重合，q_x和q_y自旋方向与z垂直而无贡献，因而q_z对强子自旋的最大贡献不可能超过$1/3$，这种简单的估算是显而易见的。夸克、弦和背景流形相对于自旋波来说是静止的，对强子自旋的贡献应为零。在后面谈及夸克海时，我们会知道点状胶子就是夸克海中的基本单元场质起伏所产生的效应。

三、质子的弦

如图 8-6(a) 中的基本单元场质Ⅱ为极化场极心的非游离态由于Ⅱ被拉成很长的三根弦，于是在原来的 O 点处，Ⅱ的体积为V_{II}，拉成弦后在 O 点邻域Ⅱ的体积$V_{\text{II}}\to 0$，这样相当于 O 处缺了一份基本单元场质，于是 O 点形成和场质出现空穴相同的效应形成极化场。R_0是极化场的内禀空间的半径。和以前不同低是极化场流形并没有出现真正的场质得失，或者说没有场质空穴，仅是体积形态不同而造成的表象，因而不会产生纤维结构，也就无电荷可言。形成这种无荷极化场后，自然存在自旋波，自旋$S=\hbar/2$，这就是质子自旋值。这样质子就存在四个极化场和四个自旋波。而这些自旋波是彼此独立的。

要特别注意的是基本单元场质的应变极限$\hbar$概念是维度未分离时的性质，作为协变场流形的一个基本组成单元，任何应变都会影响到周围的流形。但当一基本单元场质发生三维分裂后，形成三条很细的弦，虽然场质的总量并没有改变，但体积形变的最大量为ΔV，形变限制在$V\pm\Delta V$ (V 为基本单元场质体积)。和维度未分离前是一致的。维度分裂后，所形成三条很细长的弦后，基本单元场分散在一个很大的区域，场应变对于背景流形的影响变小，近似了一个独立体，基本单元场质的形变满足弹性流形的拓扑形变。

对于反质子来说和质子的情况相同，是一种对偶结构。特别值得一提的是与质子不同的是对于负电子来说，是一份游离的基本单元空穴场流形，如图 8-3(b) 中的$\overline{A}$所示。这样一基份基本单元空穴拉伸周围的非游离基态的场流形(也可以理解为真空非游离基态场流形向极心空穴坍缩)而形成带$-e$的极化场。由于极心空穴无场流形存在，自然也就无维度分裂可言，因而极心是极 1 其稳定的，构成非常稳定极化场。而由游离态空穴场质构成的极化场就是我们所熟知的e^-，为正物质。如图 8-7 所示的形式，这就是e^-极心的场质结构，和e^+是大不一样的。显然和e^+极心的结构有两种结构形式如图 8-4(a)和图 8-6(a)，两种形式极心都存在游离态场质，在强大的基态场质的挤压下，受到扰动后，很容易发生维度分裂而形成质子。由于e^-极心的这种形式使得这种空穴极化场异常地稳定，很难形成维度分离而形成反重子，所以这也是为什么我们所见到的大量物质是以e^- 和质子的形态存在，而极少见到反物质。从这里，我们可显而易见地得知宇宙中并无反物世界存在。

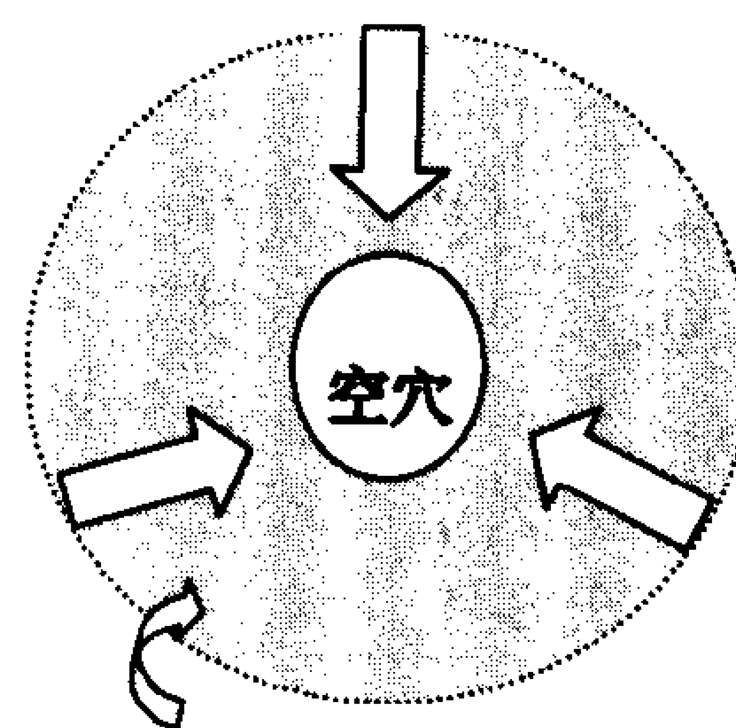


图 8-7 e^-的极心

第四节　中子结构

中子是这样形成的，在正极化场的极心区的基态质由于场密度太大，而出现迭加态，是由两份非游离态基本单元的场质迭加而成，在半空间中只有单向三维。

在受到一冲击之后，场质被击穿发生场质得失，yz 维上的 $1/3$ 的场质交给 x 维，于是 y,z 维就出现了 $1/3$ 的空穴，而电荷 $-1/3\,\mathrm{e}$，而在 x 维上得到二份 $1/3$ 的场质，于是多出 $2/3$ 的游离态场质，构成带电荷 $+2e/3$ 的极化场，其结构完全类似于质子，参见图 8-6（b）所示，用夸克表述：

$$n = uud \tag{8-5a}$$

反中子是由 x 维的场质全部 $2/3$ 中的一半给 y 维，一半给 z 维于是 x 维形成 $2/3$ 的空穴带 $-2e/3$ 电荷，y,z 维则多出 $1/3$ 的游离态场质，分别带 $e/3$ 的电荷。

$$\bar{n} = \bar{u}\bar{d}\bar{d} \tag{8-5b}$$

第五节　夸　　克

一、夸克的味

在第五章第一节中我们知道轻子存在三代，即 e,μ,τ。那么对于夸克这种极化场来说也存在相应的三代。如图 8-9 所示，A 为夸克极心的场质，和轻子不同的是轻子极心存在游离态的一份完整的基本单元场质(或者为一份完整基本单元空穴场质)，而夸克的极心存在的场质是分数态而非整数的基本单元场质(或空穴)，这种非整数态的场质是不能独立地存在于三维场流形中的。和轻子的代的原理一致，当场质 A 达到形变极限时，则极化场存在静质量，且为最低能态，

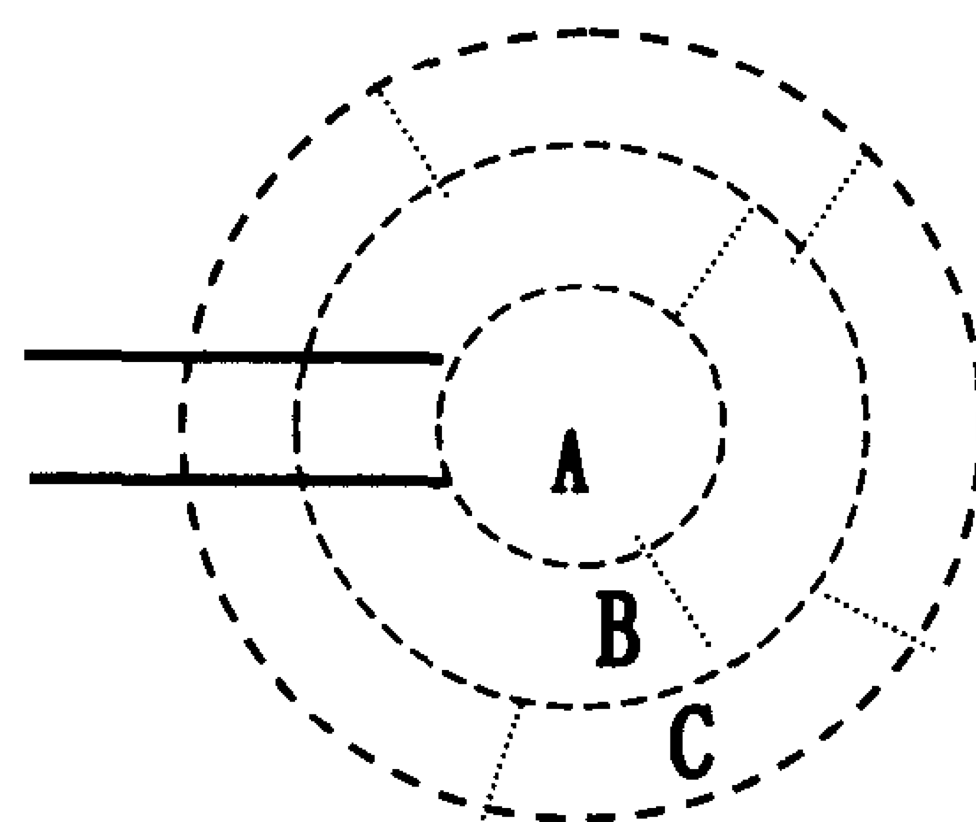


图 8-9　Quart 代

此时极化场电荷为分数电荷，为夸克的第一代，而当外层 B 的基本单元场质也达到形变极限(A、B 均达到形变极限)，此时 A 的游离态场质的量没有改变，所以电荷值不变，为夸克第二代。显然四动量变大，静质量明显大于第一代夸克。对于第三代来说是 A、B、C 均达到形变极限，电荷值不变，但静质量大于第二代。现把夸克代列表如下：

表 8-1　　夸克和轻子的代

代	轻子			夸克					
	符号	电荷Q	质量 MeV	符号	电荷Q	质量	符号	电荷Q	质量
I	e	-1	0.511	u	$2/3$	2~8 MeV	d	$-1/3$	5~15 MeV
II	μ	-1	105.66	c	$2/3$	1.3~1.7 GeV	s	$-1/3$	100~300 MeV
III	τ	-1	1784.1	t	$2/3$	137 GeV	b	$-1/3$	4.7~5.7 GeV

表 8-1 中，为简略对于相应的反粒子这里未列出。和以前的分类不一样的是这里并没

有考虑中微子，因为中微子为非完备的三维极化场，而夸克是三维极化场。

味：夸克的极化场形态称之为味，对于夸克极化场的形态不同，我们称之为夸克的味不相同。

二、夸克颜色

在 QCD 中夸克有三种“颜色”。分别定义为红、绿、蓝。颜色作为一种自由度在 QCD 中没有更深的解释，现在在场流形理论中，我们来解释颜色自由度的物理本质。如下图 8-10 我们看一个一般的重子结构，在这个结构中，颜色的本质就是维度状态。

我们可以把 x, y, z 的维度以 O 点为坐标中心，场质维度分裂后指向外的维度我们换一种名称称为 R(红)、G(绿)、B(蓝) 三种颜色态。如果仍以 O 点为坐标中心，维度的方向向内，那么便构成 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 反三维空间，并称这样的维度为反色态。于是我们可以把单独的一维 x 弦理解为 $\overline{R}, \overline{G}, \overline{B}$ 由 $\overline{R}-R$ 所张成的弦。$\overline{R}, \overline{G}, \overline{B}$ 由外向汇集于 O 点。和介子不同的是 $\overline{R}-R$ 维、$\overline{G}-G$ 维、$\overline{B}-B$ 维弦是不可分的，必须构成三维态才满足基本单元场质的不可分的要求。当三维弦连结在一起，这三维弦的能级是不一样的。能级越高则弦张力越大相应的长度就越大，能级最小，则弦的长度应该最短。这些能级相对只有三种态，即大、中、小。、而这些能级很难完全相同，此时总会存在差异。于是我们可以这样规定，把三个维度的能级态对应 R,G,B 三种颜色态。表示为

$$R=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{8-6}$$

在重子内禀空间内，谈论 x, y, z 的维度是毫无意义的，于是我们可以把能级最高态即弦最长的维规定为 B 颜色态，弦的最短维规定为 R 态，而介于中间的则规定为 G 态。当然这种规定是人为的规定，换一种规定并不影响物理结果和物理意义。

处于 R 维们夸克称 R 夸克，类似地有 G, B 态夸克，但是某一夸克不可能同时处于 R、G、B 态，只可能其中某一态。

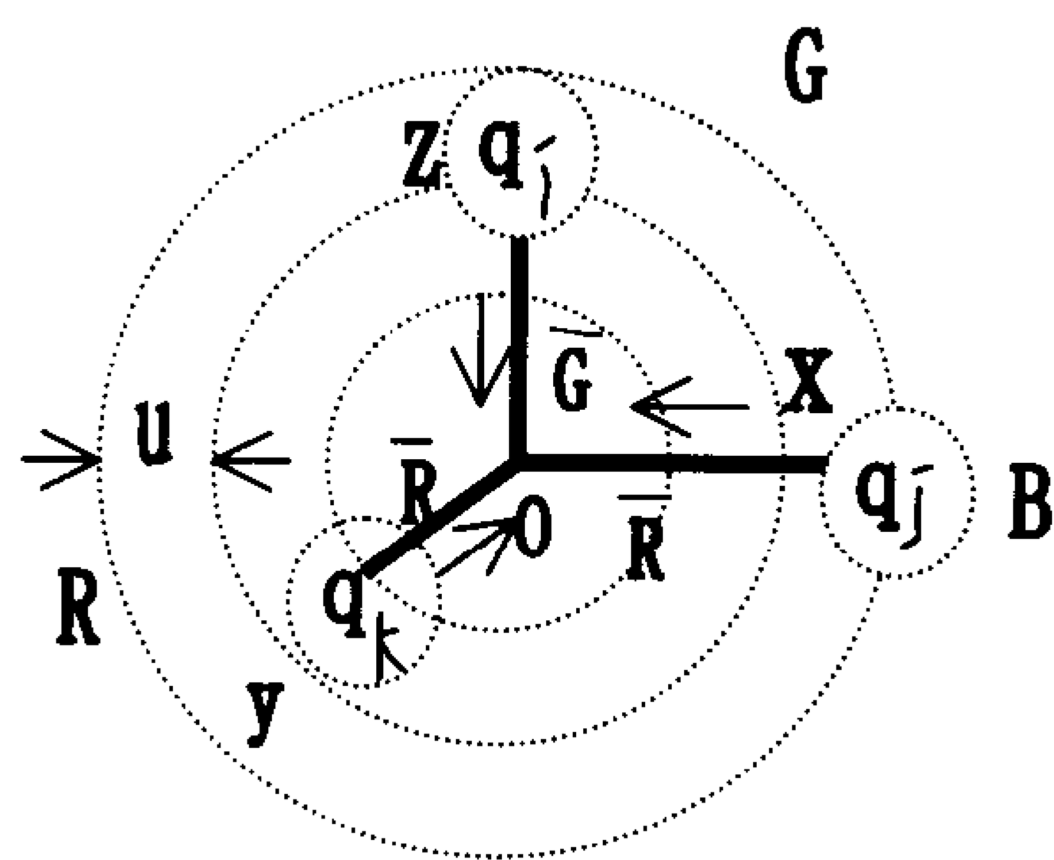


图 8-10 夸克的颜色

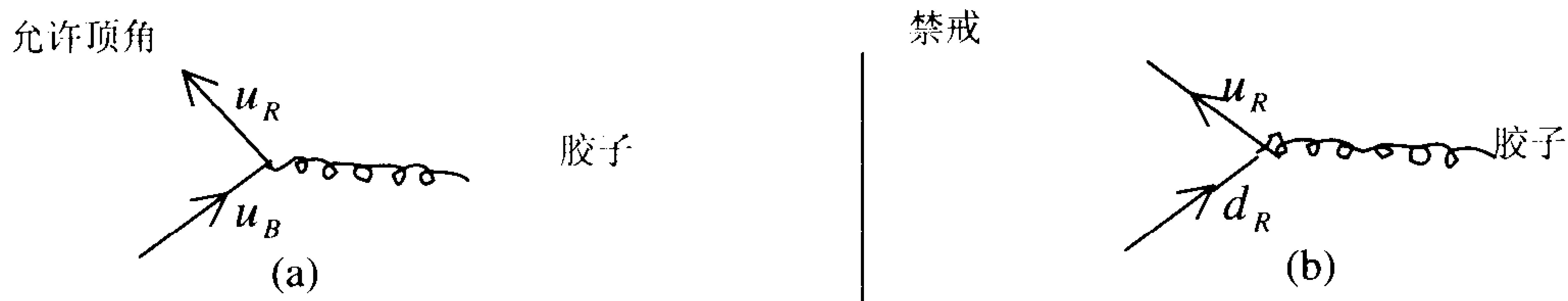
强作用是在弦之间进行的四动量交换的过程。当任意两个夸克发生强相互作用时，例如 B 夸克和 G 夸克发生强作用，G 夸克通过胶子将能量传递给 R 夸克，则原 G 夸克能级变高，弦变长。胶子改变了弦的长度状态，于是两种夸克就发生了颜色互换，用费曼图 8-11 表示。

在场流形理论中，夸克和弦是密不可分的，是由两份基本单元(游离态和非游离态)场流形拓扑形变而形成的三维弦结构的流形，场流形的三维基本属性使得夸克和色不可能独立存在。如图 8-10，质子可写为

$$p \sim \sum \varepsilon_{ijk} u_i u_j d_k \tag{8-7}$$

i, j, k 取 1, 2, 3 为色的状态。

对于介子来说是一维弦结构的流形，不存在颜色的问题，所以可以（例如 π^+ 介子）表



电磁、弱作用是发生在极化场流形本身的作用，和三维弦无关，因而不改变颜色。

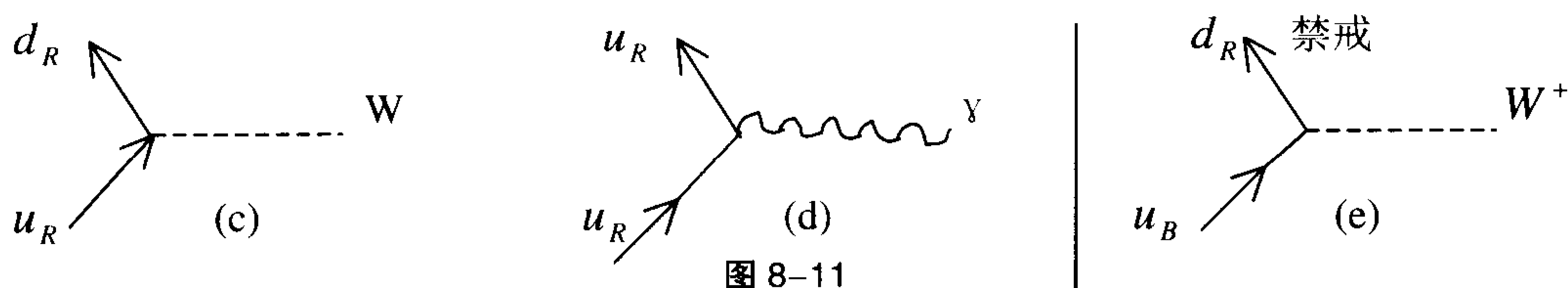


图 8-11

示为

$$\pi^+ \sim u\bar{d} \tag{8-8a}$$

在 QCD 中，把重子的三色概念作了引伸，把π^+介子表示为

$$\pi^+ \sim \sum_i u_i \bar{d}_i \tag{8-8b}$$

i取R, G, B三种态，而$R+G+B$为无色态，这样就消除了色单态存在的可能性。在场流形理论中，颜色态的概念只限于强子中的夸克，而介子这样做没有必要。当然这样做后，无色态也不影响实验观测洁果，和场流形理论中不引入色概念的结论一致。

对于夸克来讲，仅限于强子内部胶子传递能量是交换颜色态。可以以三种颜色态填充 SU(3) 群的基础表示。SU(3) 群的基础表示是三重态。在这个表示中，生成元是 3× 3 矩阵，习惯上写为$\lambda_i (i=1,2,\cdots,8)$，称为盖尔曼(Gell-Mann)矩阵，其中

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \tag{8-9}$$

它们共同的本征矢为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$。图 8-12 画出了 SU(3) 六个生成元的升降算符。$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$对应三个泡利矩阵。盖尔曼矩阵有如下对易关系

$$\left[\frac{\lambda_i}{2},\frac{\lambda_j}{2}\right]=i\sum_k f_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{8-10}$$

其中结构常数 f_{ijk} 是全反对称的，不为零的有

$$f_{123}=1, \quad f_{458}=f_{678}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f_{147}=f_{165}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{376}=\frac{1}{2}$$

这些矩阵也满足反对易关系

$$\left\{\frac{1}{2}\lambda_i,\frac{1}{2}\lambda_j\right\}=\frac{1}{3}\delta_{ij}+d_{ijk}(\frac{1}{2}\lambda_k),$$

其中 d_{ijk} 对交换任意两个指标是全对称的。

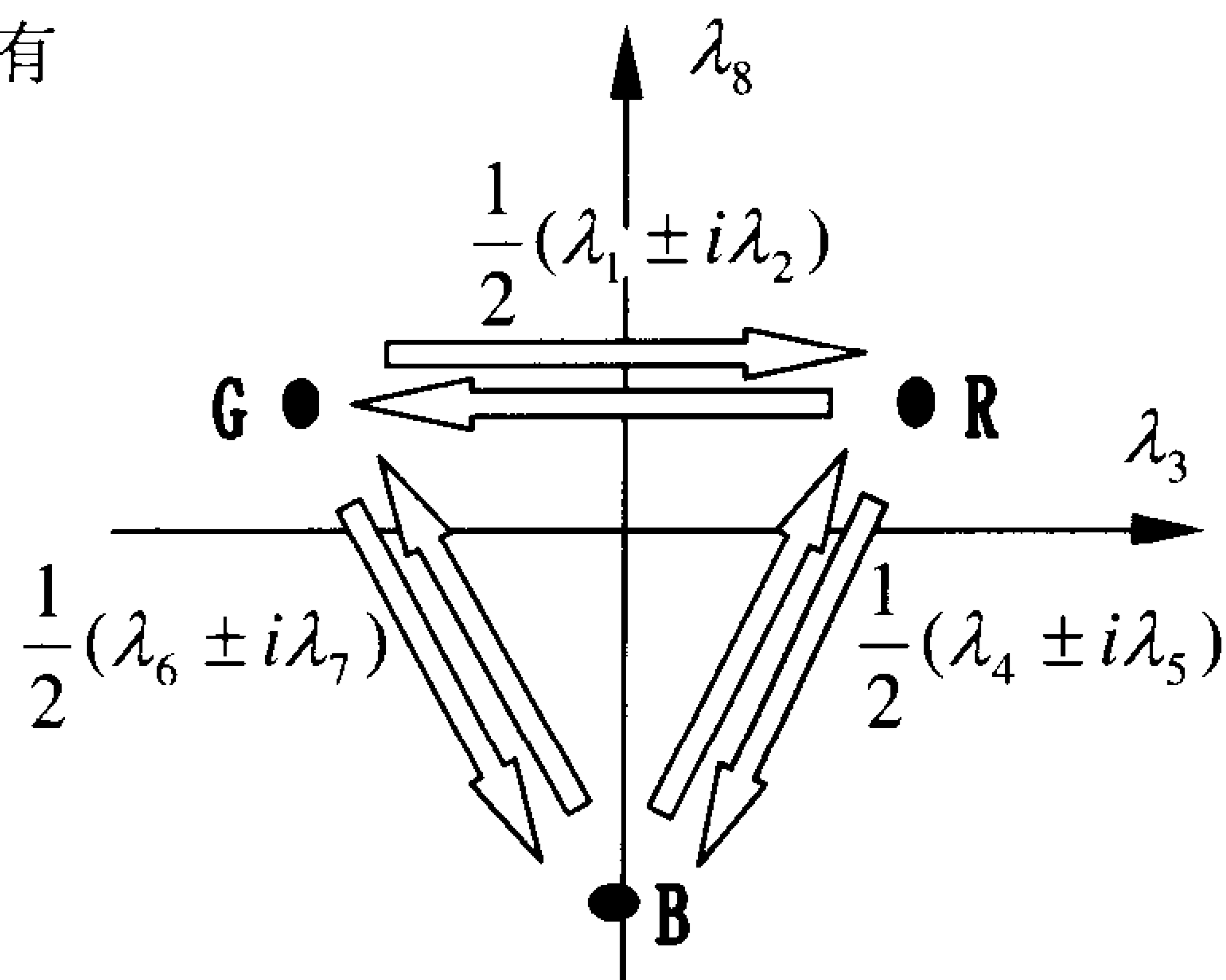


图 8–12　色 SV(3)示意图

$$d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d_{146}=d_{137}=d_{236}=d_{344}=d_{355}=\frac{1}{2},$$

$$d_{247}=d_{366}=d_{377}=-\frac{1}{2}, \quad d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

对于重子内的各种味的夸克$(u,d,s,\cdots)$ 都有三种颜色：R,G 和 B。夸克是色 SU(3) 群的三重态。与味 SU(N) 对称性不同, 味对应的是极化态, 极化态的本质对应场应变, 不同夸克极化场的组合所构成的重子的总应变不是简单的加减, 而是非线性的。换而言之, 极化场的代不能精确确定其质量, 因而味的 SU(3) 对称性是不精确的; 而色 SU(3) 对称性是精确的。在 QCD 中给出了优美的表述。传递色相互作用的胶子有八种不同的色组合

$$R\overline{G},R\overline{B},G\overline{R},G\overline{B},B\overline{R},B\overline{G},\frac{1}{\sqrt{2}}(R\overline{R}-G\overline{G}),\frac{1}{\sqrt{6}}(R\overline{R}+G\overline{G}-2B\overline{B}),$$

即 SU(3) 八重态。还有一个 SU(3) 色单态 $\frac{1}{\sqrt{3}}(R\overline{R}+G\overline{G}+B\overline{B})$, 不能传递色相互作用。

两个夸克间的电磁耦合常数与场纤量相关，耦合强度为 $e_1e_2\alpha$, 其中 e_i 为电荷 $(e_i=2/3$ 或 $-1/3)$, α 为精细结构常数。类似地，在 QCD 中，两个色荷间单胶子交换的强耦合强度为 $\frac{1}{2}c_1c_2\alpha_s$，其中 c_1 和 c_2 为与顶点相联系的色系数，习惯上称

$$\mathrm{C}C_F\equiv\frac{1}{2}|c_1c_2| \tag{8-11}$$

为色因子。我们先来考虑一下 α_s 而暂不考虑 C_F。

三、强耦合常数α_s

在前面第五章第五节中，我们对电磁耦合常数进行过分析和估算，现在我们以同样原理来考虑强作用的耦合常数。在场流形中，两夸克相互作用是通过弦作为通道交换胶子来实现四动量的传递。对于一个夸克来说总是和弦构成一体而密不可分的，在高能态时弦的

长度拉得很细而硬，弦细到接近场纤时，此时强作用的通道只有$\frac{1}{3}$基本单元的场质，通道宽为$\frac{1}{3}$，作用为最弱。所以对于单夸克来说形成通道的概率为$\frac{1}{3}$，相比较比电磁耦合的请况要简单得多，夸克只有一根弦，不考虑空间因素，两夸克相互作用的概率为(即耦合常数)

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=0.111 \tag{8-12}$$

我们得到强作用的耦合常数有可能的最小值为 0.11，而强作用的耦合常数在 QCD 中定义为$\frac{1}{2}c_1c_2\,\alpha_s$，系数$\frac{1}{2}$是 QCD 遗留下来的，我们仍然遵从以前的习惯，因此我的估算值要乘2，即$\alpha_s=0.22$。量色动力学微扰论中$\alpha_s(Q^2)$对于大Q^2近距离相互作用，这时α_s很小，实验数据表明$\alpha_s\approx 0.22$，和估算值是一致的。

这里要特别提出注意的是：我们所讨论的是耦合常数都是以单通道为前提条件。耦合常数$\alpha<<1$时，量子场论微扰论计算才有效。而耦合常数$\alpha<<1$则是由于单通道场纤偶合才使得耦合常数$\alpha<<1$，因而**纯态极化场单场纤通道耦合是量子场论中以费曼图来进行微扰计算的前提条件**。当两极化场间耦合场纤通道数超过 1 时，耦合常数α变大，微扰论失效。对于小动量时，探测粒子动量不大，无法穿透强子，强子为复合极化场，是一个复合体而非纯态极化场，这样探极化场要面对一个由多个极化场所构成的极化场集合，和最初耦合常数的的定义相悖。耦合不再是常数，而是一个大的非线性变数，再以单场纤的形式进行估算的值就不再正确了。

色因子$|c_1c_2|$ 可以通过胶子的八种不同的色组合形式计算得出，其结果如下

$$-\alpha\rightarrow\begin{cases}-\frac{4}{3}\alpha_s & \text{介子}\\ -\frac{2}{3}\alpha_s & \text{重子}\end{cases} \tag{8-13}$$

这里的介子并无色概念，引入色概念，可以认为颜色是三种能级状态。对于能级不同，夸克之间的弦长也不同，耦合强度也不一致，表现为色因子不同。

第六节　胶　　子

胶子是由弦流形和弦内波两部分构成的。弦流形把夸克紧紧联接在一起而组成介子和重子。夸克之间传递动量是通过弦内的波动来进行传递的。一维波表现出强作用改变夸克的颜色但不改变味道，这种波动还改变弦的长度，因而带有颜色量子数，不带味道量子数。

一、　某根弦内的波

对于弦来说，是一根细而长的弹性流形，弦的粗细是均匀的。当某一维弦上的夸克振动时，就会压缩弦，弦截面发生微小的纵向位移，那么它的邻近部分就将产生拉伸或压缩。

这种微小的纵向位移以及拉压应力就会以波的形式向远处传播，则弦的纵向位移可用一维波动方程来描述。如图 8-13 沿弦轴向建立坐标 x，夸克极心弦轴向的位移为 u，弦的弹性模量为 E，密度为 ρ，弦的截面积为 A，考虑长为 dx 的微元，可得运动方程为

$$AE(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx)-AE\frac{\partial u}{\partial x}=A\rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或 $$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8-14}$$

其中 $$c^2=\frac{E}{\rho} \tag{8-15}$$

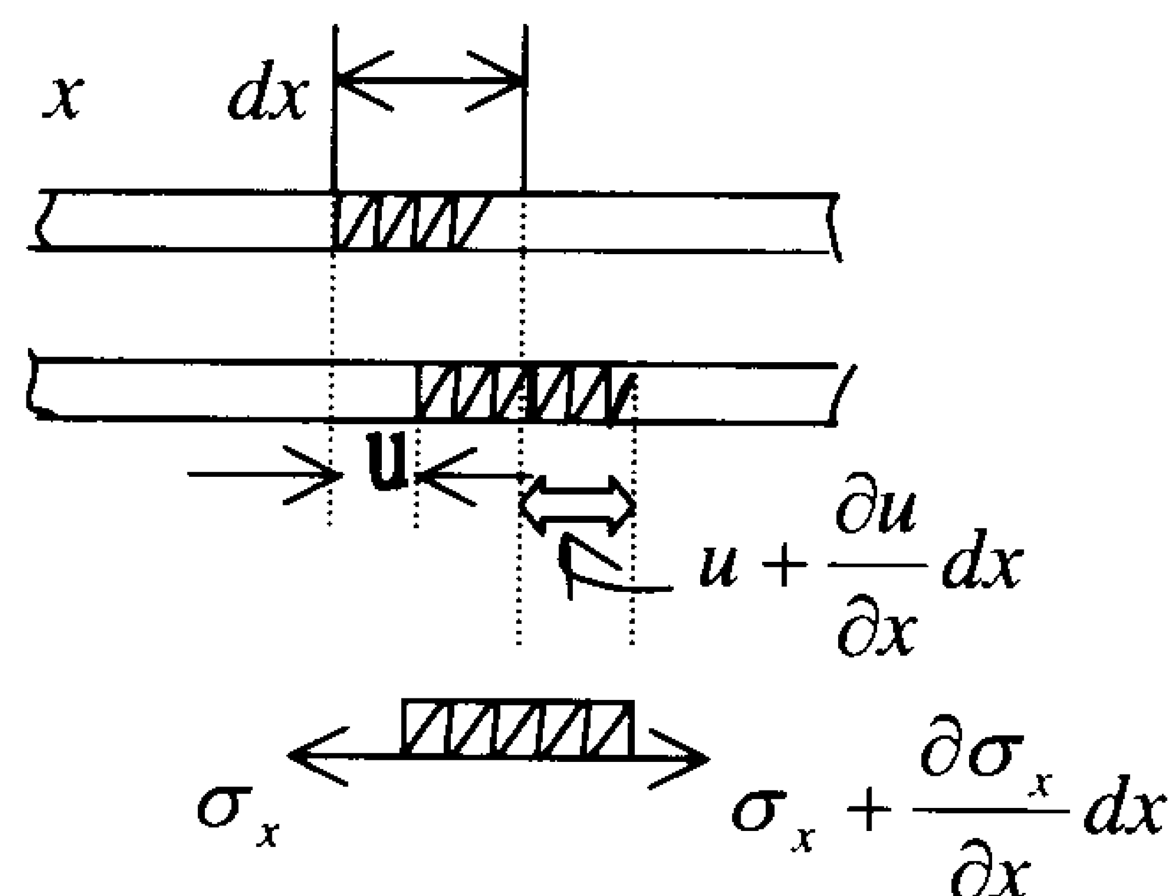


图 8–13　弦应变

这里的 c 是波在弦中的传播速度。这个速度是形变场流形内的传播速度，应为光速。要注意的是 E 和 ρ 是经典概念并不适用于场流形理论，这里仅作一种借用。波动方程(8-14)的一般解为

$$u=f(x-ct)+g(x+ct) \tag{8-16}$$

这种解称波动方程的达朗伯(D'Alembert,J.R.) 解。其中函数 f 与 g 须由边界条件和初始条件确定。

上式的解有很清楚的物理意义。考虑 $f(x-ct)$ 这一部分。若取以速度沿 x 正方向移动的坐标轴 ξ，则动坐标 ξ 与固定坐标 x 之间的关系为

$$\xi=x-ct,$$

于是

$$f(x-ct)=f(\xi)$$

这表明，在动坐标系中，函数的值取决于作标 ξ，而与时间 t 无关，即函数的图形相对于动坐标保持不变。因而 $f(x-ct)$ 表示一个以速度 c 向 x 正方向移动且保持形状及大小不变的行波。同理 $g(x+ct)$ 表示一个以速度 c 向 x 负方向传播的行波。

如图 8-10 所示，处于 B 态的夸克 q_j 向中心 O 点压缩弦，压缩量为 u，放出一份波 $f(x-ct)$，由 B 态降为 G 态，而原 G 态夸克 q_i 吸收一份波 $f(x+ct)$，由 G 态升至 B 态，夸克 q_j 和夸克 q_i 颜色态互换。这里要特别注意的是 $f(x-ct)$ 是一份孤立波。对(8-16) 式求 t 偏导数，可求得夸克向下或向上跃迁的速度

$$v=\frac{\partial u}{\partial t}=-cf'(x-ct)+cg'(c+ct)$$
$$=-cf'(\xi)+cg'(\eta) \tag{8-17}$$

将(8-16) 式对 x 求偏导数，可得弦中的应变

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x-ct)+g'(x+ct) \tag{8-18}$$

其中 f',g' 分别是对各自自变量的导数。胶子波带有颜色量子数，在 QCD 中是用图 8-14 费曼图来表述。

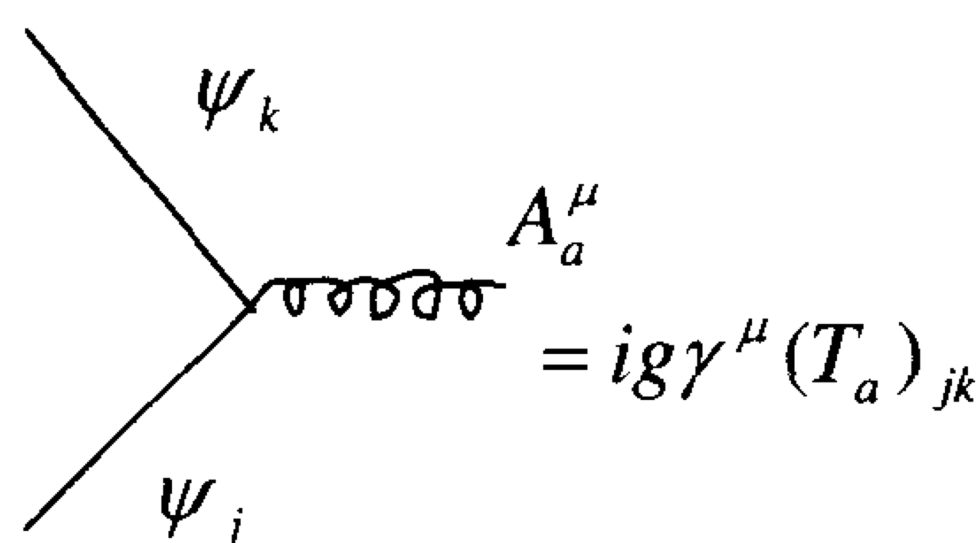


图 8-14 胶子改变夸克颜色态

二、弦及夸克海

1. 弦流形

胶子的弦除了传递波以外，还直接传递力，使得场流形存在三顶点作用。正是由于三顶点作用才使得 QCD 理论具有渐近自由性质。费曼图如下

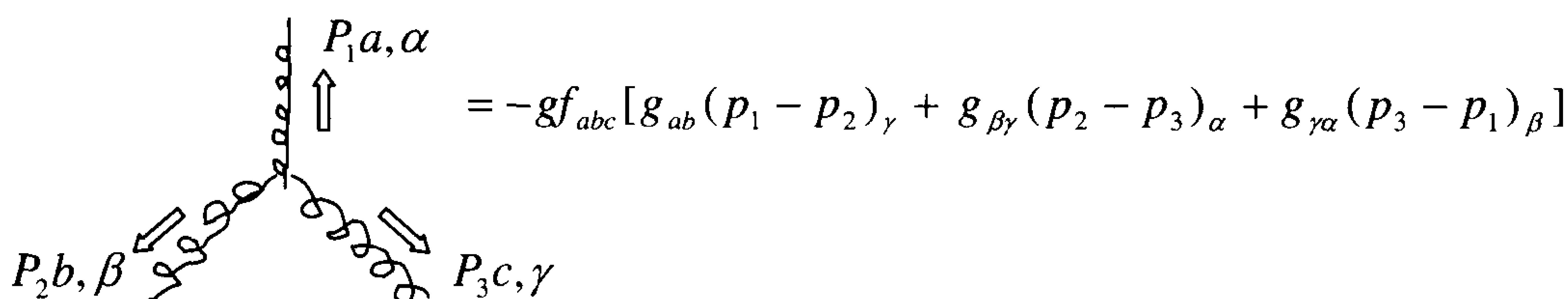


图 8-15 三胶子相互作用

在场流形中，由于强子内部只有三根弦，所以不存在胶子四点自相互作用，只有四夸克在一起才存在四胶子相互作用。

2. 夸克海

我们来谈一下夸克海。根据中微子(和 e,μ 等轻子)和核子非弹性散射的实验数据，我们对核子内禀空间有了更具体地了解。假定读者对 QCD 有所了解，结构函数具有近似的标度无关性表明质子内部存在类点粒子，这些粒子被称为部分子。

质子由各种类型的“类点”部分子组成($i=u,d,\cdots$，相应的电荷为 e_i；当然还有胶子)。我们引入部分子动量分布，即受撞部分子 i 携带质子动量 p 的份额为 x 的几率

$$f_i(x)=\frac{dp_i}{dx}= \quad p \qquad i \quad xp \qquad (1-x)p \tag{8-19}$$

所有的份额相加起来为 1，即

$$\sum_{i'}\int dx x f_{i'}(x)=1 \tag{8-20}$$

这里 i' 对所有部分子。式中

$$x=\frac{1}{\omega}=\frac{Q^2}{2M\nu} \tag{8-21}$$

其中 $Q^2=-q^2$ 为四动量转移，$\nu=E-E'$，E 和 E' 分别为探测粒子的初态末态能量，M 为质子质量。核子的结构函数 $F_2(x)$ 等于核子内部具有动量为 xp 的部分子的几率 $f(x)$ 和 x 的乘积

$$F_2(x) = xf(x) \tag{8-22}$$

大Q^2时电子散射获得质子非弹性结构函数，相应的式子为

$$\frac{1}{x}F_2^{ep}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left[u^p(x)+\bar{u}^p(x)\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left[d^p(x)+\bar{d}^p(x)\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left[s^p(x)+\bar{s}^p(x)\right] \tag{8-23}$$

由电子散射获得中子非弹性结构函数，相应的式子则为

$$\frac{1}{x}F_2^{en}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left[u^n(x)+\bar{u}^n(x)\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left[d^n(x)+\bar{d}^n(x)\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^2\left[s^n(x)+\bar{s}^n(x)\right] \tag{8-24}$$

共有六个未知的夸克结构函数。

$$\begin{aligned} u^p(x) &= d^n(x) \equiv u(x), \\ d^p(x) &= u^n(x) \equiv d(x), \\ s^p(x) &= s^n(x) \equiv s(x) \end{aligned} \tag{8-25}$$

质子有三个价夸克u_v u_v d_v，再加上夸克一反夸克对的夸克海

$$\begin{aligned} u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) &= s_s(x) = \bar{s}_s(x) = S(x), \\ u(x) &= u_v(x) + u_s(x), \\ d(x) &= d_v(x) + d_s(x) \end{aligned} \tag{8-26}$$

其中$S(x)$为所有夸克味公有的海夸克分布。对所有给出贡献的部分子求和，必须用到质子的量子数：电荷 1，重子数 1，奇异数 0，由此要求

$$\begin{aligned} \int_0^1\left[u(x)-\bar{u}(x)\right]dx &= 2, \\ \int_0^1\left[d(x)-\bar{d}(x)\right]dx &= 1, \\ \int_0^1\left[s(x)-\bar{s}(x)\right]dx &= 0 \end{aligned} \tag{8-27}$$

把(8-26)式和(8-23)式、(8-24)式合在一起，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}F_2^{ep} &= \frac{1}{9}[4u_v + d_v] + \frac{4}{3}S, \\ \frac{1}{x}F_2^{en} &= \frac{1}{9}[u_v + 4d_v] + \frac{4}{3}S, \end{aligned} \tag{8-28}$$

其中$4/3$是对六种海夸克分布的e_i^2求和的结果。由于海中的夸克一反夸克对由胶子产生，我们期望在小x时，$S(x)$有类韧致辐射的谱，于是当$x \to 0$时，海夸克的数目将呈对数增长，对于给定的Q^2，当$x \to 0, \nu \to 0$时，若虚光子一质子总截面为常数，则有$f_i(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1/x$，在小$x$时部分子的数目的对数增长。值得注意的是，在小动量($x \approx 0$)时，

三个价夸克将被形成海 $S(x)$ 多重的低动量的 $q\overline{q}$ 对遮蔽。根据(8-28)式，应有

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \underset{x\to 0}{\to} 1 \qquad (8\text{-}29)$$

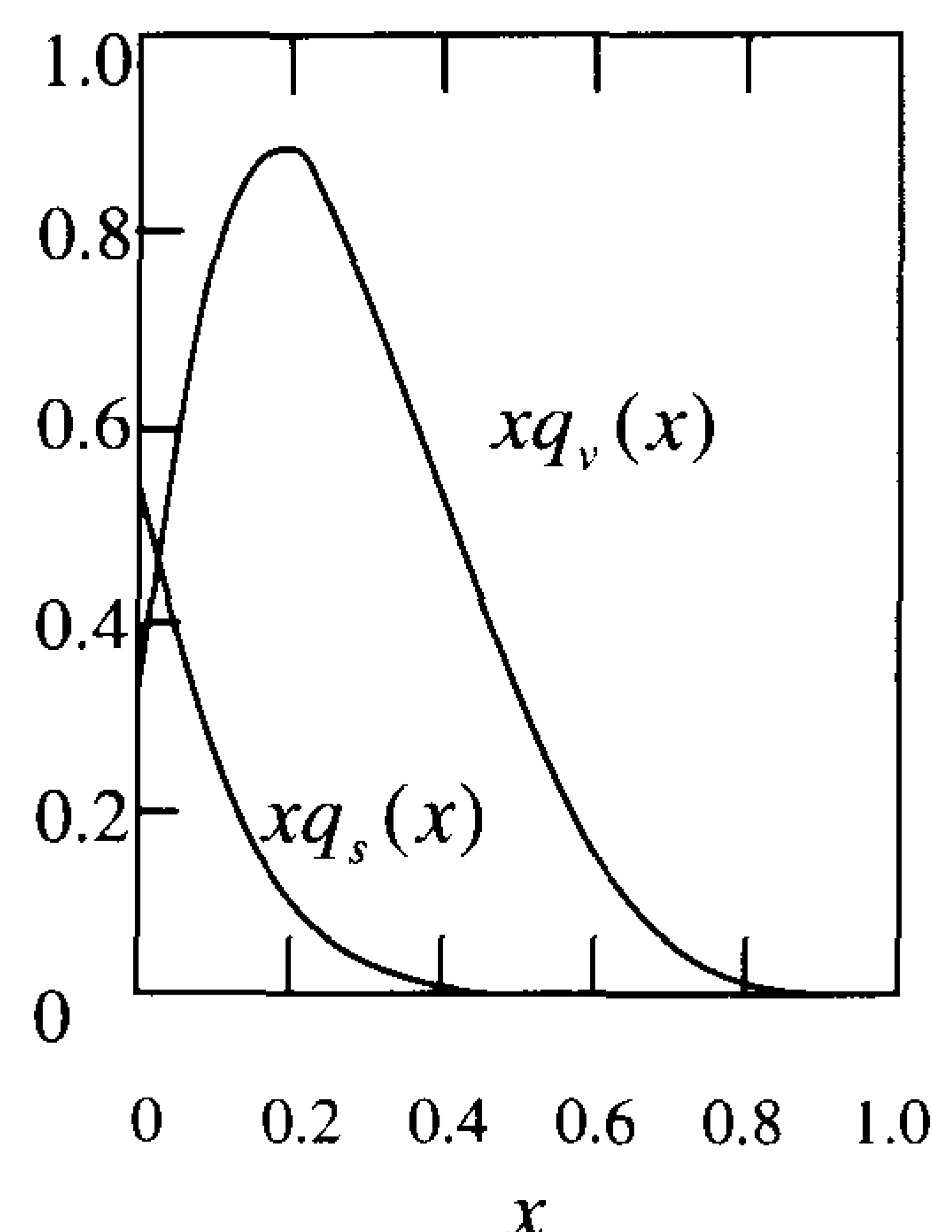


图 8-16 核子动量分布

实验数据证实了这个结论。另一方面，在大动量 $(x \approx 1)$ 时，高速的价夸克为主，有

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \underset{x\to 1}{\to} \frac{u_v + 4d_v}{4u_v + d_v} \qquad (8\text{-}30)$$

对于质子，在大 x 时显然有 $u_v >> d_v$，(8-20)式的比值趋近于 $1/4$。

利用 F_2^{ep} 和 F_2^{en} 的实验数据积分，得到以下结果：

$$\left.\begin{aligned}
&\int dx\ F_2^{ep}(x) = \frac{4}{9}\varepsilon_u + \frac{1}{9}\varepsilon_d = 0.18 \\
&\int dx\ F_2^{en}(x) = \frac{1}{9}\varepsilon_u + \frac{4}{9}\varepsilon_d = 0.12 \\
&\varepsilon_g \approx 1 - \varepsilon_u - \varepsilon_d
\end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}31)$$

我们得到 $\varepsilon_u = 0.36, \varepsilon_d = 0.18, \varepsilon_g = 0.46$。因此，胶子大约携带了 50% 的动量。

(Ⅰ) 根据实验,得到的结构函数具有近似的标度无关性， $F_2(x,q^2) \cong F_2(x)$，我们知道这表明核子内部包括类点狄拉克粒子一部分子的存在。

(Ⅱ) 这种组元具有自旋量子数 1/2；$[2xF_1(x) \cong F_2(x)]$。还可以证明这些组元具有分数电荷。这些都和夸克模型一致。对这些部分子的量子数的研究，使我们能够把它们与夸克等同起来。

(Ⅲ) 核子中约有 10% 的的反夸克存在，主要分布在小 x 范围内。更详细的实验结果给出，核子内部的反夸克主要分布在小 x ($x < 0.3$)范围之内。如图 8-15。

(Ⅳ) 夸克只占核子动量的一半，其余一半由胶子占有，胶子传递夸克间的强相互作用，改变夸克的颜色（参见章乃森 编著《粒子物理学》下册 P256）。质子动量的相当大部分的份额被中性部分子所携带，而不是夸克。这些中性部分子就是 QCD 中的胶子，它们不与光子发生相互作用。

从质子场流形结构来看，质子的弦就是胶子。质子总的场形变由三部分构成：a.夸克极化场场应变；b.基本单元场质维度分裂构成的应变；c.内禀空间向质子极心区应变的场流形。这里 b, c 两部分场应变构成了质子内禀空间的场应变。

在这里，我们感兴趣的是粒子海。在量子场理论中，所有基本粒子都存在与之相应的粒子海，于是真空中便有了电子海，各种夸克海…。真空中有那么多种类的基本粒海，真空结构就变得非常复杂。读完本书之后，我们对场流形理论有了一个全面的了解，我们知道了真空的结构和组成，并知道了各类粒子的形成机制。我们这里想用场流形理论的观点再谈一下夸克海。

真空场流形是平直场流形，对于平直场流形来说，量子场的传播本身就是一种扰动，但这种扰动对背景场流形的影响很弱，平直场流形具有良好的弹性，背景场流形并不吸收能量，所产生的真空起伏几乎为零。核子内的场流形是非平直的，质子总的场应变所构成的质子总动量为 1，由 $\varepsilon_g = 0.46$ 知质子内禀空间的场应变构成的内禀动量接近总动量的

$1/2$。强应变的场流形弹性变弱，因而强子内强应变场的存在使得强子内禀场流形在受到扰动时(如图 8-17 所示)，真空非游离态基本单元场流形会产生起伏，这种场流形波动构成核子内禀场流形的半激发态，由一维激发态、二维激发态和三维激发态构成，即 $n(n=1,2,3)$ 维激发态。n 维激发态指真空态基本单元场流形的 n 维场质被激发，形成 n 维拉伸压缩态场流形，换而言之是 n 维非传播量子波，我们可以视为 n 维虚光子，n 维虚光子的存在构成了夸克海。当探测极化场在进入核子内禀空间内进行探测时，若探测粒子四动量 p 越大，则探测极化场的体积越小，探测粒子本身对核子内禀流形扰动越小，所探测到的夸克海的结构越精细。反之，则探测到的夸克海的结构越粗糙。强扰动时，作用力极强，则产生瞬态完整的由弦联结的游离态基本单元场质和对偶完整的游离态基本单元空穴，形成介子态，包括虚介子态和实介子态(即大量 K,π 介子)。介子态的存在使得强耦合常数变大，成为一个复杂的函数。达到量子波发射条件能产生大量的三维量子波，即光子。若扰动强到使弦时断裂，可产生对偶极化场以及复合对偶极化场，即轻子和强子。

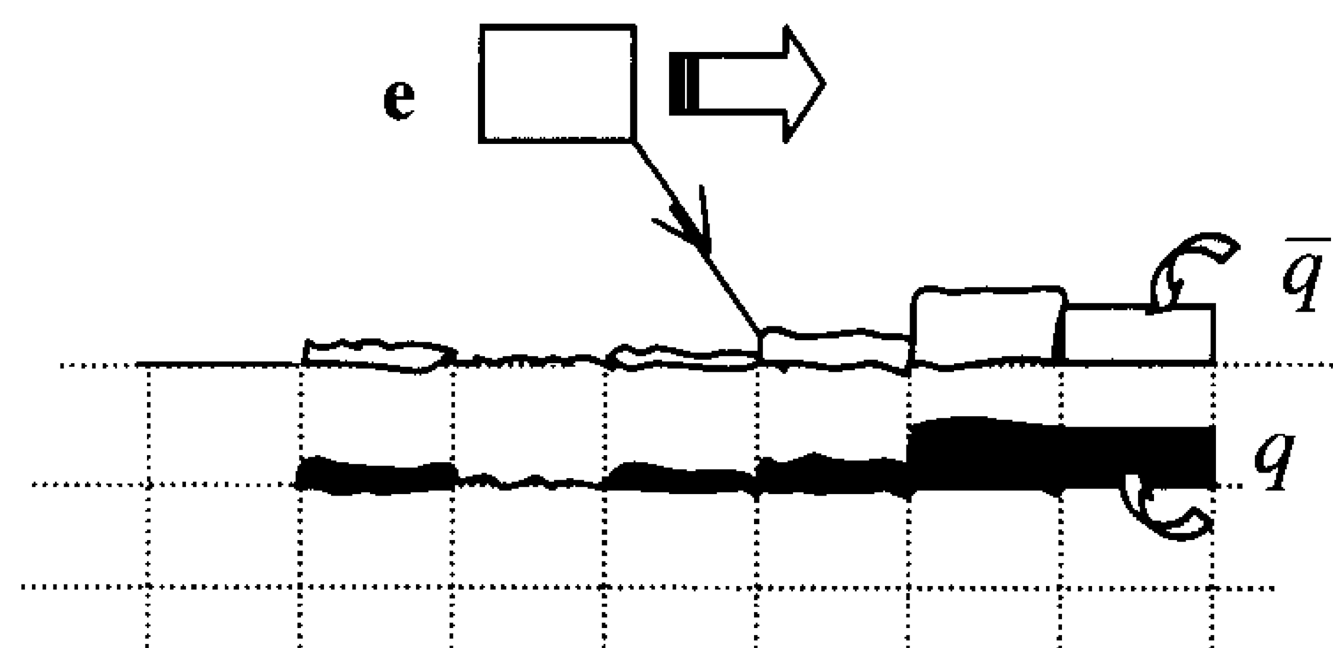


图 8-17　夸克海

场论中把虚光子理解为是由 $q\,\bar{q}$ 对构成，这样胶子的数量是惊人的，而质子的场流形结构中，胶子就是弦。显然弦的数量是有限的，我们要重新理解胶子，把胶子的概念和弦的概念加以区分。

第七节　强子的 SU(3) 表述

类似于颜色的表述形式，我们可以把 u，d，s 三种不同味的夸克视为 SU(3) 群的三个基底

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad s=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{8-31}$$

构成

$$\phi=\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix} \tag{8-32}$$

这样我们便能根据 SU(3) 群的理论得到由两个夸克系统所构成的介子八重态(这和夸克颜色八重态在数学上是完全一致的，只是符号不同而已)，而由三夸克所构成的系统组成的强子八重态和十重态。这里，场流形理论和夸克模型是一致的，夸克模型是得到广大物理学家所认可的理论。具体的构成如表 8-2 和表 8-1 所示：

表 8-2　$J^P=0^-$ 介子的夸克组成

夸克构成	$J^P=0^-$
$d\bar{u}$　$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$　$u\bar{d}$	π^-,π^0,π^+
$d\bar{s}$　$u\bar{s}$	$k^0,\ k^+$
$s\bar{u}$　$s\bar{d}$	$k^-,\ \bar{k}^0$
$(u\bar{u}+d\bar{d}+2s\bar{s})/\sqrt{6}$	$\eta(549)$
$(u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$	

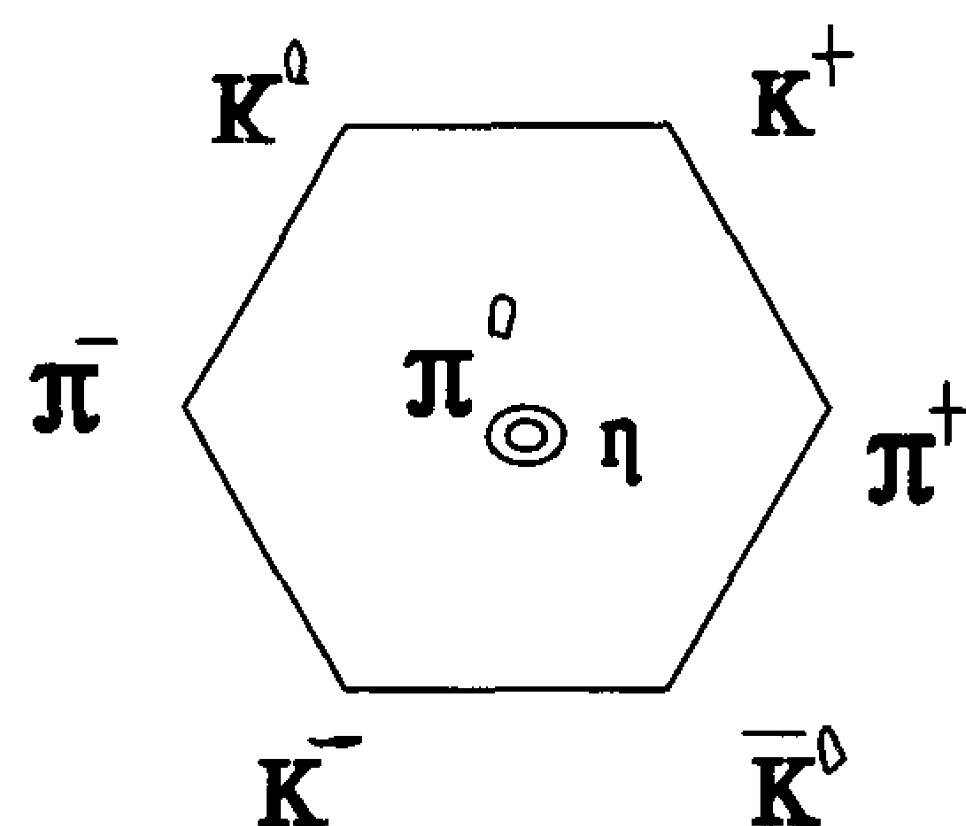


图 8-18　介子八重态

表 8-3　重子的夸克组成

夸 克 组 成	$J^P=1/2^+$	$J^P=3/2^+$	m/MeV/c^2	
udd　uud	n　p		938	八重态
$(du-ud)/\sqrt{2}$	Λ		1116	
dds　$(du+ud)s/\sqrt{2}$　uus	Σ^-　Σ^0　Σ^+		1189	
$(uu+dd)/\sqrt{2}$	Ξ^-　Ξ^0		1315	
ddd　udd　uud　uuu		$\Delta^-,\Delta^0,\Delta^+,\Delta^{++}$	1232	十重态
dds　uds　uus		$\Sigma^{*-},\Sigma^{*0},\Sigma^{*+}$	1385	
dss　uss		Ξ^{*-},Ξ^{*0}	1530	
sss		Ω^-	1672	

强子的味和颜色相比较并不是严格对称的。原因如下：

味对应的是极化态，极化态存在三代，因而夸克也存在三代。对于每一代相应的夸克来说都存在相应的背景场流形。例如低应变的背景场流形只会存在低态的夸克极化场，相应的高应变的背景场流形才会存在高态的夸克极化场。因而 u,d 夸克不可能和 t,b 夸克同时出现在一个重子中，构成某一强子，因为在同一重子的内禀空间内背景流形是相同的。对于同代夸克，若质量差异态大，对背景流形的要求也存在差异。由于背景流形的限制，代与代之间不能任意组合，相应的对于同代则容易组合，同种夸克对背景流形的要求是完全一致的，则更容易组合(当然要满足整数电荷的前提条件下)。高代的极化场由于要具有高应变的背景流形才能形成。若把高应变背景流形视为局域参照系，则①该局域参照系要么以非常接近光速的速度在运动；②处于静态高应变区，如黑洞内部；③两极高能粒子强烈撞击的瞬间区域。这些苛刻的条件使得高代夸克不容易出现。

另一方面，对于低能代夸克虽然构成某种强子，但由于组合的不同,极化态对应的场应变也不同，而场应变直接决定了极化场的能量及传播性质的，换而言之，极化场的代不能精确确定其质量。综合上述两方面的原因，味的 SU(3) 对称性是不精确的；且不能构成更大的群。

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝超大统一场流形理论
作者＝陈蜀乔著
页数＝１４２
ＳＳ号＝１０８６５５０７
出版日期＝２００２年